Generalizzazione della serie di Fibonacci e il paradosso dei relativi quadrati

Gruppo Eratostene

Abstract

In this paper we generalize the Fibonacci serie (based on couple 1; 1) to all infinite couple n; n, with n natural number

Riassunto

In questo lavoro generalizziamo la serie di Fibonacci (basata sulla coppia numerica 1; 1) ad infinite serie basate sulle altrettanto infinite coppie n; n con n numero naturali. Con tale generalizzazione si risolve anche il cosiddetto paradosso dei quasi quadrati di Fibonacci, già da noi trattato in precedenza.

Introduzione

In un articolo precedente ("I quadrati di Fibonacci", Rif.1) abbiamo visto come il prodotto tra due numeri di Fibonacci alternati, per esempio 3, ***5*** e 8, sia il quadrato del numero centrale di una terna di Fibonacci, $\pm$ 1; in questo esempio, 3*8 = 24 = 5^2 - 1 = 25 - 1; il segno algebrico + e - si alterna per ogni terna di Fibonacci successiva: per esempio, per la terna successiva 5, ***8***, 13 abbiamo infatti 5*13=65 = ***8***^2 +1 = 64 + 1, e per la successiva terna 8, ***13***, 21 abbiamo 8*21 = 168 = 13^2 - 1 = 169 -1, e così via all'infinito. Questo andamento è connesso al prodotto tra due numeri primi gemelli (o comunque numeri con differenza 2, per la quale i numeri gemelli sono un caso particolare: entrambi primi) ma con la nostra seguente generalizzazione della serie di Fibonacci, la differenza tra il prodotto dei due numeri esterni e il quadrato del numero centrale alla terna è il quadrato della semidifferenza tra i due numeri esterni della terna, o tra due altri fattori del prodotto N dei due numeri esterni alla terna, il che ci riporta all'algoritmo di Fermat (Rif.2).

La serie di Fibonacci nota può ritenersi basata sulla coppia numerica più semplice: 1; 1 e sulla somma dei due ultimi numeri:

1
1 + 1 = **2**
2 + 1 = **3**
3 + 2 = **5**
5 + 3 = **8**
8 + 5 = **13**
… … …

come si vede, i numeri in rosso della terza colonna sono tutti i numeri della serie di Fibonacci a partire da 2. Tale serie è presente in parecchi e già noti fenomeni naturali : petali di fiori, spirali di pigne o conchiglie, ecc.(Rif 3)
Possiamo ora generalizzare la serie di Fibonacci, basandola su altre coppie numeriche, per esempio, andando con ordine, sulla coppia 2; 2, tale che:

2
2 + 2 = **4** = 2*2
4 + 2 = **6** = 2*3
6 + 4 = **10** = 2*5
10 + 6 = **16** = 2*8
16 + 10 = **26** = 2*13
… … …

Ora i numeri in rosso sono i termini della nuova serie, corrispondente al doppio , 2F , della serie precedente, nota come serie di Fibonacci.
I primi sei numeri di questa nuova serie sono anche i numeri delle dimensioni coinvolte nelle teorie di stringa, e delle relative compattificazioni, andando a ritroso:

26 – **16** = **10**   = dimensioni delle teorie di stringa a 26 e a 10 dimensioni
10 -   **6** = **4**   = dimensioni spazio-temporali del nostro universo fisico (Rif. 4)

Il rapporto tra un termine e il precedente è ovviamente sempre Φ ~ 1,618.., per es. 26/16 = 1,625 = 13/8.
Per i quadrati invece il discorso cambia, poiché, presa la prima terna **4, 6, 10**, abbiamo:

4*10= 40, 6^2 = 36, 40 - 36 = ***4*** = 2^2 = semidifferenza (10 – 6)/2   = 4/2 = 2, e 2^2 = ***4*** ;

Per la serie di Fibonacci classica, la semidifferenza era invece 1, il suo quadrato è 1, e quindi il prodotto differisce di 1 dal quadrato.
Con la terna successiva della serie generalizzata in base alla coppia 2; 2, abbiamo **6, 10, 16**:

6*16 = 96,   10^2 = 100,   100-96= ***4***   256 = (26-6)/2 = 20/2 = 10, e 10^2 = ***100;*** 16 = anche semisomma s tale che s-d = p infatti 16 - 10= 6 e 16 +10 = 26 = s + d, con d = semidifferenza.
Con la prossima terna, il segno algebrico ritornerà - infatti: 26 +16 = **42**, e la terna sarà **16, 26, 42:**

16*42 = 672, 26^2 = 676,   676 - 672 = ***4***   ma ora (42-16)/2 = 13, e non 2 di (4/2)^2;

sommando però 672 +13^2 = 672 +169 = 841 =29^2, con 29 -13 = 16 = ***4***^2, e quindi 672 deve essere divisibile per

16/2 = 8, infatti 672 /8 = 84 , e 672 si può fattorizzare anche come 8*84 oltre che come 16*42; infatti ora fattorizzando con i quadrati perfetti (Rif. 5) tramite semisomma s e semidifferenza d, abbiamo:

d=(84-8) / 2 = 76/2 = 38, e d^2 = 38^2=1444; s^2 =N + d^2 = 672 + 1444 = 2116, s = √2116 = 46: p = s - d = 46 – 38 =8, q = s + d = 46 + 38 = 84.

(Notiamo che 8, oltre ad essere numero di Fibonacci, è anche il numero connesso alle vibrazioni fisiche delle superstringhe.) Vediamo ora la successiva terna: poiché 26 +42 = 68, tale prossima terna sarà **26,42, 68**, e avremo**:**

26*68 = 1768, 42^2 = 1764, 1768 – 1768 = ***4*** **,** che è il quadrato dei numeri della base 2, 2. come 1 è il quadrato dei numeri della base 1; 1 e come 1 era il quadrato della differenza dei fattori p e q tali che p*q = Q-1, con Q un quadrato di Fibonacci, ora ***4*** è, analogamente , il quadrato della semidifferenza tra due fattori del numero Q' – 4. Infatti, in quest'ultimo caso, Q' = 42^2 – 4 = 1764 – 4 = 1760 =40*44, con d = (44 – 40)/2 = 2 e 2^2 = ***4*** . Questo succede solo per Q' – d^2, (e quindi con segno negativo).

Riepilogando, si ottengono Q' quadrati del numero alternativamente minori e maggiori del prodotto N =p*q con p e q numeri esterni della terna di Fibonacci classica o generalizzata. Solo quando Q' è minore di N, la differenza N-Q' è il quadrato dei numeri della coppia n, n; negli esempi precedenti la coppia 2; 2, e quindi il quadrato è

2^2 = ***4***, differenza d = Q'- N di infinite terne di Fibonacci generalizzate. Quando invece il quadrato del numero centrale è maggiore di N, se si sommano N + Q si ottiene il quadrato della semisomma s =(p+q)/2 (elementi esterni della terna)

Vediamo ora la generalizzazione con la coppia 3; 3

				3		
3	+	3	=	**6**	=	3*2
6	+	3	=	***9***	=	3*3
9	+	6	=	**15**	=	3*5
15	+	9	=	**24**	=	3*8
24	+	15	=	**39**	=	3*13
…		…		…		…

Ora abbiamo ovviamente numeri di F forma 3F, con rapporto circa Φ = 1,618 tra un numero e il precedente (24/15 =1,6 = 8/5), ma con differenza 3^2 = 9 tra il prodotto N =p*q e il quadrato Q del numero centrale della terna, sempre però solo quando il quadrato è maggiore del prodotto, e quindi Q' – N = n^2, in questo caso 3^2=***9***

Esempi:

prima terna 6, 9, 15:

N =6*15 = 90 , Q' = 9^2= 81; poiché Q'< N, N- Q' = ***9***, infatti 90 - 81 = ***9*** seconda terna   9, 15, 24

N = 9*24 = 216,   Q' = 15^2 = 225, N < Q', Q' – N = 225 -216 = ***9*** anche se Q' ora è maggiore di N

terza terna 15, 24, 39

N = 15*39 =585, Q' = 24^2 = 576, Q' < N,   N – Q' = 585 – 576 = ***9***

Osserviamo che ora la differenza è sempre 9, quale che sia più grande N oppure Q'; ma questo succede anche per n^2= 1^2 = 1 nella serie classica di Fibonacci, basata sulla coppia 1; 1 generalizzata sulla coppia di base 4; 4.

Vediamo

	4
4 + 4 =	**8**
8 + 4 =	**12**
12 + 8 =	**20**
20 +12 =	**32**
… …	…

ora la differenza tra Q' ed N sarà ovviamente 4^2 = ***16***

prima terna 8, 12, 20.

N = 8*20 = 160, Q' = 12^2 = 144,   N - Q' = 160 -144 = ***16*** seconda terna 12, 20, 32

N = 12*32 = 384, Q’ = 20^2 = 400, Q’- N = 400 - 384 = ***16***

terza terna 20, 32, 52 (poiché 32 +20 =52):

N = 20*52= 1040, Q’ 32^2 = 1024, N - Q’ = 1040 – 1024 = ***16***

Osservazione : quando N è minore di Q’, i suoi fattori, oltre che i due numeri esterni della terna di Fibonacci, sono anche due numeri, equivalenti a p’ = (√ N + n^2) - n,
q’ = (√N+n^4) + n;

per esempio 384, oltre che 12*32,   è uguale anche a p’*q’ = (√384 +16)   - 4 * (√384 +16)   + 4 = 16*24 = 384= N

Rivediamo brevemente il tutto con apposite tabelle.

Coppia 1; 1 semidifferenza d^2 = 1^2 = ***1***

Terna di Fibonacci N=p*q Q = r^2 N = Q - ***1***

N = Q + ***1*** Altri fattori di N

p	r	q	rettangolo p'*q'	quadrato	
1	2	3	1*3 = 3	4	4 = 3 + ***1***
			--- (diff.3 – 1 = 2 =2d)		
2	3	5	2*5 = 10	9	10 = 9 + ***1***

3	5	8	3*8 = 24	25	24 = 25 -***1***
			6*4 diff. 6 – 4 = 2		
5	8	13	5*13 = 65	64	65=64 + ***1***

8	13	21	8*21 = 168	169	168 =169 -***1***
			12*14 diff.= 14-12 = 2		
…	…	…	… …	…	… …
			…. …	… …	

Come si nota, i prodotti di forma Q-***1*** hanno talvolta anche altri due fattori con differenza 2 e quindi con d^2 =***1***

Coppia 2; 2 semidifferenza d^2 = 2^2 = ***4***

Terna di Fibonacci N=p*q Q = r^2 N = Q - ***4***

N = Q+***4*** Altri fattori di N

p	r	q	rettangolo p'*q'	quadrato	
2	4	6	2*6 = 12	16	12=16 - ***4***
			3*4, diff. =1 (diff. 6-2= 4= 2d)		
4	6	10	4*10 =40	36	40= 36+***4***
			2*20; 5*8 (diff. 10-4=6)		
6	10	16	6*16= 96	100	96 = 100 - ***4***
			3*32; 6*16; 12*8 diff. 12-8= 4 =2d		
10	16	26	10*26=260	256	
			260=256+***4*** 8*32,13*20; …		
…	…	…	…	…	…
…			…		

Come si nota, solo i prodotti N minori di Q e di forma Q -***4***, hanno altri due fattori, e con differenza ***4***

Coppia 3; 3 semidifferenza d^2 = 3^2 = ***9***

Terna di Fibonacci N=p*q Q = r^2 N = Q - ***9*** N = Q + ***9*** Altri fattori di N

p,	r,	q	rettangolo p'*q'	quadrato	
3	6	9	3*9 = 27	36	27 = 36 - ***9***
			diff. 9-3= 6 =2d		
6	9	15	6*15 = 90	81	90 -81 = ***9***
			9*10, 3*30, 15*6, 6*15 diff. 6=2d		
9	15	24	9*24 = 216	225	216 = 225– ***9***
			12*18 diff. 18-12 = 6 = 2d		
15	24	39	15*39 = 585	576	585-576 = ***9***
…	…	…	… …	…	…
	…	…	….		

Per brevità si omette la tabella per la coppia 4; 4, con semidifferenza al quadrato = 4^2 = ***16***
Facciamo un solo esempio per la prima terna 4, 8, 12 N = 4*12 =48,.. r^2 = 8^2= 64, N-Q = 64-48 = ***16*** con 48 = 4*12 con differenza 12-4 = 8 = 2d = 2*4, con 4^2 = ***16***
Analoghi risultati si ottengono con qualsiasi generalizzazione della serie di Fibonacci basata sulla coppia n; n con n numero naturale

Con la generalizzazione basata sulla coppia 6; 6 abbiamo invece

6
6+6 = **12**
12+6= **18**
18+12=**30**
30+18=**48**
...

cioè i sestupli dei numeri di Fibonacci (6F), importanti poiché danno, con la formula 6F $\pm$ 1 , i numeri primi naturali, molti dei quali coincidono con le frequenze delle vibrazioni delle stringhe, oltre che con le orbite dei pianeti (Rif **.**3), così come i doppi dei numeri di Fibonacci (2F) sono connessi ai numeri di dimensioni in cui vibrano le stringhe, e relative compattificazioni (26 – 16 = 10, 10 – 6 = 4 = dimensioni del nostro universo fisico, Rif.4)

Esempio di terna e relativi quadrati

6, 12, 18 N = 6*18 = 108, Q = 144, Q - N = 144 -108 = 36 = **6**^2

Conclusione

Quindi tale generalizzazione alle infinite coppie n; n sembra interessante anche per le sue connessioni con la fattorizzazione con i quadrati perfetti, o con l'algoritmo di fattorizzazione alla Fermat, basato sulla semidifferenza d e sulla semisomma s, tali che p=s-d e q = s+d. Per le generalizzazioni alle coppie 2; 2 e 6;6 osserviamo le accennate conseguenze per la teoria di stringa

Riferimenti

1) "I quadrati di Fibonacci" in sezione "Articoli su Fibonacci" del nostro sito www.gruppoeratostene.com

2) "L'algoritmo di Fermat" in sezione " Articoli sulla fattorizzazione"

3) "La serie di Fibonacci e le serie numeriche naturali (snn) come la natura evita i quadrati"in sezione "Articoli su Fibonacci"

4) "Dimensioni, Fibonacci, stringhe: nuove interessanti connessioni" in sezione "Articoli sulla Fisica –Matematica"

5) "Fattorizzazione con algoritmo generalizzato con quadrati perfetti in ambito delle forme 6k $\pm$1"

6) "Le successioni di Fibonacci" di Orazio Muscato, sul sito www.dmi.unict/~muscato/Le%20successionidi%20Fibonacci.pdf

Caltanissetta 2.1.2010