

LA RISOLUZIONE DI EQUAZIONI ALGEBRICHE DI GRADO ELEVATO (Solving high degree Algebraic Equations)

Sommario: nel presente articolo vengono illustrati e considerati due metodi per il calcolo delle radici di una equazione polinomiale algebrica a coefficienti reali di grado anche superiore al 4°. I due algoritmi presi in esame sono, il primo noto come algoritmo del Quoziente-Differenza(Q-D), il secondo noto come algoritmo di Bairstow. Tutti e due i metodi implicano operazioni di tipo iterativo tramite le quali si possono far convergere i calcoli a dei risultati che presentano valori numerici molto vicini od uguali alle effettive radici dell'equazione algebrica considerata.

L'algoritmo Q-D risulta interessante perché è uno dei pochi metodi numerici che non necessita di parametri iniziali legati in qualche maniera alle radici dell'equazione stessa, a differenza del metodo di Bairstow per il quale occorre iniziare le operazioni di iterazione con opportuni parametri affinché i calcoli portino a dei valori uguali o prossimi a quelli effettivi della radici anziché a risultati di overflow.

Nell'articolo, dopo aver accennato alla utilizzazione della risoluzione delle equazioni algebriche nel campo della tecnica, vengono descritti i due algoritmi e si mettono in evidenza pregi, difetti e limitazioni inerenti ciascuno di essi. Da quanto esposto si evince che risulta preferibile il metodo di Bairstow, con la dotazione però di opportuni accorgimenti realizzati nel programma in Qbasic realizzato per tale tipo di algoritmo che è risultato valido per tutte le equazioni algebriche che sono state provate e sottoposte a verifica.

Può anche essere interessante in diversi casi di risoluzione di equazioni sfruttare i risultati trovati con l'algoritmo Q-D per accelerare le operazioni di calcolo da eseguire con l'algoritmo di Bairstow.

Per avere dei risultati concreti sono stati realizzati due programmi in linguaggio Qbasic (i cui listati non sono riportati nella presente versione di questo articolo), uno relativo all'algoritmo Q-D, l'altro relativo a quello di Bairstow. In essi per i calcoli ci si limita ad utilizzare la doppia precisione messa a disposizione dal software in Qbasic. E' necessario pertanto fare attenzione ai risultati ottenuti per evitare il pericolo di andare in overflow o di avere addirittura errori di calcolo, quando i coefficienti dell'equazione sono o numeri interi molto grandi o numeri decimali composti da molte cifre.

Nel programma relativo all'algoritmo di Bairstow si è introdotta una ricerca esaustiva ed automatica dei due parametri "r" ed "s" riguardanti ciascun fattore quadratico di cui è composta l'equazione superando inoltre la difficoltà di eventuali possibili trabocchi di calcolo.

L'efficienza dei due programmi è stata verificata tramite la risoluzione di diverse equazioni di cui si conoscevano a priori gli effettivi valori delle loro radici.

Si è fatto ricorso inoltre all'algoritmo di Horner, per il calcolo del valore numerico di un polinomio $P(x)$ relativo alla equazione algebrica $P(x) = 0$ di grado n quando x assume un valore prefissato $x = x_0$ reale ovvero valori $x = (x_0 \pm i y_0)$ complessi coniugati.. Con questo algoritmo si può in effetti effettuare una verifica nei riguardi dei valori numerici trovati al fine di accettarli o no come valori uguali o molto prossimi alle effettive radici dell'equazione. Si tenga comunque presente che si possono avere a volte risultati non soddisfacenti dovuti alle limitazioni di precisione od addirittura agli errori di calcolo relativi alle prestazioni di calcolo che risultano dal tipo disponibile di aritmetica utilizzata, anche se a doppia precisione..

Si vuole infine fare presente che la risoluzione di equazioni algebriche anche di grado elevato risulta possibile con l'utilizzazione di un opportuno **Eseguibile** presente su questo Sito nella sezione Software dedicata all'autore..

Abstract: in this paper we propose two methods for the solution of an algebraic polynomial equation with real coefficients and degree higher of the fourth. The envisaged methods are the Quotient - Difference and the Bairstow algorithms. The both algorithms involve iterative operations, by which the computation converge toward numerical values that will give improving estimates of the equation roots.

The Q-D algorithm is interesting because it doesn't need to supply any appropriate parameter for the iterative starting operations, differently from the Bairstow algorithm which wants some parameters for working out with success the course of the iterative arithmetical operations to avoid an overflow output.

In the paper we hint some employment of the algebraic equations in the technical field; then we give a description of the two algorithms and we highlight their advantage, restrictions and failings and we infer that it is preferable the Bairstow algorithm, provided with the suitable some trick, as we have implemented a program in the Qbasic language.

This algorithm is proved efficient for all equations which we have tested. It is interesting also for some equations to utilize the results (outputs) founded by Q-D algorithm in order to quicken the computation pertinent to the Bairstow algorithm.

We carried out two programs in Qbasic language: the former is pertinent to QD algorithm and the latter regards the Bairstow algorithm. The computation for both is implemented in double - precision arithmetic, available in the Qbasic software. In the present paper however we not report the list of the two programs.

If the equation coefficients are large integer or large floating-point numbers, with this type of arithmetic we must take care to avoid possible overflow or wrong results.

We have inserted in the Bairstow algorithm program the performances for an exhaustive and automatic pursuit concerning the two parameters, "r" and "s" of every quadratic factor regarding the equation at issue and for avoiding the overflow output.

We checked the efficiency of two programs by solving several equations with already their true roots, and we outline the control of the founded zeros (roots) by Horner algorithm realized by another program, for the aim to consider them as same or near real zeros of the equation, but considering that also the used double-precision arithmetic shows wrong computation result for arithmetical operations carried out with large floating-point numbers having fixed word length.

We inform that it's possible solving algebraic equations by use of an appropriate program (Eseguibile) available on this Site in the Software part dedicated to the author.

1 - INTRODUZIONE

1.1 – Generalità sulle equazioni algebriche

Nella letteratura tecnica e precisamente nel campo dell'analisi numerica esistono vari algoritmi dedicati alla risoluzione con metodi iterativi delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto. E' noto infatti che per le equazioni di forma generale di grado superiore al quarto si ha l'impossibilità di risolverle per radicali (Teorema di Ruffini – Abel) [0].

In effetti per alcuni tipi particolari di equazioni algebriche, anche di grado superiore al 4°, si possono ricavare attraverso opportuni accorgimenti e formule le relative radici, come per l'equazione binomia $x^n - a = 0$, o come per le equazioni reciproche che si possono ridurre dal grado $2n$ al grado n , per cui ad esempio un'equazione di 6° grado può ricondursi alla risoluzione di una di 3° grado.

Le equazioni di 2°, 3° e 4° grado possono poi essere risolte con formule implicanti radicali: si vedano ad esempio i testi scolastici per la risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado e testi o articoli più specializzati per quelle di terzo e quarto grado per le quali si può fare riferimento ad una vasta bibliografia [1], [2], [3] [4],[5].

Questa nota è pertanto dedicata al calcolo delle radici di una equazione algebrica a coefficienti reali di forma generale e di grado superiore al quarto, affrontando il problema di trovare i valori numerici delle sue radici reali o complesse con una approssimazione sufficientemente elevata, vale a dire con un errore fra l'effettivo valore della radice ed il valore trovato per la maggior parte delle volte inferiore in valore assoluto a 10^{-8} :

Si vuole far notare che con gli algoritmi proposti nel presente articolo si possono facilmente risolvere anche le equazioni di 3° e 4° quarto grado, con una precisione sul valore delle radici non certo inferiore a quella ottenuta con le classiche soluzioni analitiche per radicali.

E' noto che una equazione algebrica di grado n a coefficienti reali ha n radici che possono essere di valore reale od essere formate da coppie di valori complessi e coniugati, intendendo per coppia di radici complesse coniugate due radici una del tipo $\alpha + i\beta$ e l'altra del tipo $\alpha - i\beta$ dove α e β sono numeri reali e $i = \sqrt{-1}$

Nell'impiego dei diversi metodi iterativi, come ad esempio il metodo di Bairstow od altri ancora, risulta auspicabile partire con opportuni valori dei parametri implicati nelle iterazioni allo scopo di poter convergere attraverso un limitato numero di iterazioni verso gli effettivi valori delle radici.

In questi metodi la scelta ottimale dei suddetti parametri tuttavia dipende in qualche modo dall'effettivo valore delle radici dell'equazione. Pertanto il maggior inconveniente di questi algoritmi sta proprio nel fatto che non conoscendo evidentemente a priori il valore delle radici non si possono conoscere e quindi scegliere i valori più convenienti dei suddetti parametri al fine di poter far convergere i risultati con un numero piccolo di iterazioni verso i valori più o meno approssimati delle radici. Si parte allora di solito da valori convenzionali che possono portare in diversi casi addirittura ad una divergenza dei risultati con la conseguenza di avere un overflow nei calcoli. Si potrebbe quindi procedere per tentativi fino a trovare dei valori iniziali fortunati per i parametri di partenza tramite i quali, attraverso le opportune iterazioni proprie dell'algoritmo, si riesce a convergere verso gli

effettivi valori delle radici. Può essere interessante allora utilizzare un algoritmo che non richiede a priori la conoscenza dei valori approssimati delle radici.

Un efficace algoritmo che possiede questa caratteristica è quello conosciuto nella letteratura tecnica come il metodo del Quoziente – Differenza (QD method) [6], [7], [8].

Poiché tuttavia questo metodo, anch'esso di tipo iterativo, presenta una convergenza lenta verso gli effettivi valori delle radici, potrebbe risultare opportuno, una volta trovati i valori anche se non molto approssimati delle radici, proseguire nella ricerca con l'algoritmo di Bairstow, tramite il quale si può arrivare generalmente ad una migliore approssimazione di tali valori.

Risulta conveniente così in diversi casi utilizzare la combinazione dei due algoritmi, l'algoritmo Q-D a cui far seguire l'algoritmo di Bairstow.

Qui di seguito ci limiteremo ad illustrare le relazioni e le formule iterative esistenti fra gli opportuni parametri che vengono impiegati nei due algoritmi, senza entrare nel merito delle giustificazioni teoriche relative ai due algoritmi, per i quali esiste una idonea letteratura [6], [7], [8] [9], [10].

1.2 – Cenni sull' utilizzo delle equazioni algebriche nella tecnica

Prima di passare alla descrizione dei due algoritmi, si vuole accennare all'importanza che assume la risoluzione delle equazioni algebriche con coefficienti reali, non solo nel campo prettamente matematico dell'analisi numerica, ma anche in svariati campi della tecnica. In effetti nella descrizione di molti fenomeni fisici, e quindi nello sviluppo di modelli matematici che li riguardano, trova ampia applicazione una particolare classe di equazioni differenziali, precisamente quella delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. E' noto che per risolvere un tale tipo di equazione si può utilizzare la sua associata equazione caratteristica che risulta essere una equazione algebrica di opportuno grado a coefficienti reali costanti. E' pure altrettanto noto che nel campo della tecniche circuitali elettriche, invece di descrivere un sistema fisico con un modello matematico che si evolve nel tempo e quindi come forma differenziale nella variabile temporale t, lo si può studiare come forma algebrica nella variabile di tipo complesso convenzionalmente denominata con il simbolo $s = \sigma + i w$, utilizzando la trasformata di Laplace,

risolvendo così al posto di equazioni differenziali delle equazioni algebriche del tipo $\sum_{k=1}^{n+1} a(k) \cdot s^{(n+1)-k} = 0$

dove $a(k)$ sono costanti reali ed s è la variabile che nell'ambito della trasformata di Laplace prende il posto della x . Nel vasto campo poi dei Servomeccanismi, o più in generale in quello dei Sistemi di controllo lineare, la funzione di trasferimento $F(s)$, quale rapporto tra la trasformata della segnale in uscita di un Sistema e la trasformata del segnale d'ingresso al Sistema stesso, sia esso controeazionato o meno, è costituita dal rapporto fra due polinomi algebrici $\frac{N(s)}{D(s)}$. E' noto ad esempio che per lo studio della stabilità di un Sistema a controeazione occorre

conoscere dove sono dislocate nel piano complesso s le radici del polinomio $D(s)$, che prendono il nome di poli di $F(s)$.

E' pertanto opportuno se non indispensabile risolvere l'equazione algebrica $D(s) = 0$ che può essere anche di grado superiore al 4°.

2 - ALGORITMO QUOZIENTE- DIFFERENZA (Q – D)

Sia da risolvere la seguente equazione algebrica di grado n :

$$a(1) \cdot x^n + a(2) x^{n-1} + a(3) \cdot x^{n-2} + \dots + a(n-2) \cdot x^3 + a(n-1) \cdot x^2 + a(n) \cdot x + a(n+1) = 0$$

dove i coefficienti $a(k)$ con l'indice $k=1,2,3,\dots,n+1$ sono numeri reali

Si prendano in considerazione due matrici bidimensionali:

una, che chiameremo Matrice Q, è formata da elementi relativi ad un parametro che indicheremo $q(h, k)$ con $h=1,2,3 \dots it$; $k=1, 2, 3,\dots,n$

l'altra, che chiameremo Matrice D, è costituita da elementi relativi ad un parametro indicato con $d(h, j)$ con $h=1,2,3,\dots,it$; $j=0,1,2,3,\dots,n$

dove n = grado dell'equazione e it = numero di iterazioni richieste

Utilizzando i coefficienti $a(k)$ dell'equazione si costruisca la riga iniziale della matrice Q con i seguenti n valori $q(1, k)$:

$$q(1,1) = -a(2)/a(1), \quad q(1,2) = q(1,3) = q(1,4) = \dots = q(1, n-1) = q(1, n) = 0 \quad (1)$$

e la riga iniziale della matrice D con i seguenti $n + 1$ valori $d(1, j)$:

$$d(1,0) = 0, \quad d(1,1) = \frac{a(3)}{a(2)}, \quad d(1,2) = \frac{a(4)}{a(3)} \dots \dots d(1,n-1) = \frac{a(n+1)}{a(n)}, \quad d(1,n) = 0 \quad (2)$$

le due matrici risultano intimamente connesse fra di loro in quanto per le successive righe fra gli elementi $q(h, k)$ e $d(h, j)$ sussistono le due seguenti relazioni di tipo iterativo una per il calcolo del valore di $q(h, k)$:

$$q(h, k) = d(h-1, k) - d(h-1, k-1) + q(h-1, k) \quad (1a)$$

con h variabile da 2 a it e k variabile da 1 a n

l'altra relativa al calcolo del valore $d(h, j)$:

$$d(h, j) = d(h-1, j) \cdot q(h, j+1) / q(h, j) \quad (2a)$$

con h variabile da 2 a it e j variabile ora da 1 a n

Dall'esame delle due formule (1a) e (2a) si deve considerare quanto segue:

una volta noti con la (1) i valori degli elementi relativi alla prima riga della matrice Q e con (2) i valori degli elementi relativi alla prima riga della matrice D, si possono calcolare con la (1a) gli elementi relativi alla seconda riga della matrice Q; per calcolare però con la (2a) gli elementi relativi alla seconda riga della matrice D risulta necessario avere disponibili tutti i valori $q(h,k)$ della seconda riga della matrice Q; utilizzando poi sempre le relazioni (1a) e (2a), si possono ricavare gli elementi delle successive righe delle due matrici calcolando comunque sempre tutti gli elementi della h -esima riga relativa alla matrice Q prima di passare al calcolo degli elementi relativi alla h -esima riga della matrice D.

Effettuando poi un opportuno numero it di iterazioni si riescono a trovare tutte insieme simultaneamente le n radici dell'equazioni con valori tanto più approssimati ai loro valori effettivi quanto maggiore è il numero it delle iterazioni effettuate Per trovare tali valori si tenga conto di quanto esposto qui di seguito.

Per il calcolo delle radici $x(k)$ si prendono in considerazione dopo un congruo numero di iterazioni i valori ottenuti per $q(h,k)$ nell'ultima iterazione it ed in quella precedente e vale quanto segue:

- **1R:** si ha una *radice di tipo reale* ed il suo valore risulta essere $x(k) = q(it, k)$ se si constata che nella colonna k presa in considerazione, il valore $q(it, k)$ risulta essere costituito da numeri sempre o tutti negativi o tutti positivi per un opportuno insieme di valori $q(h, k)$ precedenti $q(it, k)$, vale a dire se non si sono avuti cambiamenti di segno nei valori di $q(h, k)$ rilevati in un opportuno numero di valori numerici precedenti l'ultima iterazione; inoltre le varie differenze relative a $q(h, k) - q(h-1, k)$ risultano normalmente in valore assoluto sempre più piccole.

- **1C:** si ha una coppia di *radici di tipo complesso e coniugato* se si constata che nella colonna k presa in considerazione, per un opportuno numero di valori $q(h, k)$ precedenti il valore $q(it, k)$, essi risultano di segno variabile, vale a dire vi sono sia numeri positivi che negativi nei valori $q(h, k)$ rilevati in un opportuno numero di valori precedenti l'ultima iterazione; inoltre le varie differenze $q(h, k) - q(h-1, k)$ possono presentare valori molto diversi fra loro e non tendono a diventare sempre più piccoli.

Per conoscere poi quali sono i valori numerici di questa coppia di radici complesse si procede prendendo in considerazione il fattore quadratico $x^2 - r \cdot x - s$ con i valori di r e di s ricavati dalle seguenti relazioni

$$r = q(it, k) + q(it, k+1) \quad (3)$$

$$s = -q(it-1, k) \cdot q(it, k+1) \quad (4)$$

Uguagliando a zero tale fattore quadratico si calcolano quindi le sue due radici con le note formule dell'equazione di secondo grado:

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4 \cdot s}}{2}$$

Per comprendere meglio quanto esposto facciamo un esempio.

Si vuole risolvere la seguente equazione algebrica di 5° grado:

$$x^5 + 37x^4 - 25x^3 + 44985x^2 + 528984x - 15852382 = 0 \quad (5)$$

Per risolvere questa equazione o più in generale una qualsiasi equazione algebrica si è approntato un programma in linguaggio Qbasic dedicato allo sviluppo del presente algoritmo.

Il listato del programma è riportato nell'ALLEGATO 1, ma solo nella versione digitale del presente articolo.

Sviluppando l'algoritmo, partendo dalle relazioni le (1) e (2) e impiegando quindi le formule iterative (1a) e (2a), si riportano qui di seguito le ultime 16 righe relative alla matrice Q degli elementi trovati del parametro q(h,k) avendo impostato e sviluppato i calcoli relativi a 100 iterazioni (it=100):

| q(h , 1) | q(h , 2) | q(h , 3) | q(h , 4) | q(h , 5) |
|--------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| q(85 , 1) = -49.00001 | q(85 , 2)= 15.58538 | q(85 , 3) = 6.41461 | q (85 , 4)=-23.00001 | q(85 , 5)= 12.99999 |
| q(86 , 1) = -49.00001 | q(86 , 2)=-47.42403 | q(86 , 3)= 69.42402 | q(86 , 4)=-23 | q(86 , 5) = 12.99999 |
| q(87 , 1) = -49.00001 | q(87 , 2)= 44.81543 | q(87 , 3)=-22.81544 | q(87 , 4)=-23 | q(87 , 5)= 12.99999 |
| q(88 , 1) = -49.00001 | q(88 , 2)=-2.14347 | q(88 , 3)= 24.14346 | q(88 , 4)=-23.00001 | q(88 , 5)= 12.99999 |
| q(89 , 1) = -49.00001 | q(89 , 2)= 526.79016 | q(89 , 3)=-504.79017 | q(89 , 4)=-23 | q(89 , 5)= 12.99999 |
| q(90 , 1) = -49.00001 | q(90 , 2)= 19.94605 | q(90 , 3)= 2.05394 | q(90 , 4)=-23 | q(90 , 5)= 12.99999 |
| q(91 , 1) = -49.00001 | q(91 , 2)=-32.24633 | q(91 , 3)= 54.24632 | q(91 , 4)=-23.00001 | q(91 , 5)= 12.99999 |
| q(92 , 1) = -49.00001 | q(92 , 2)= 55.55421 | q(92 , 3)=-33.55422 | q(92 , 4)=-23 | q(92 , 5)= 12.99999 |
| q(93 , 1) = -49.00001 | q(93 , 2)= 2.52352 | q(93 , 3)= 19.47647 | q(93 , 4)=-23 | q(93 , 5)= 12.99999 |
| q(94 , 1) = -49.00001 | q(94 , 2)=-406.76476 | q(94 , 3)= 428.76475 | q(94 , 4)=-23 | q(94 , 5)= 12.99999 |
| q(95 , 1) = -49.00001 | q(95 , 2)= 24.66001 | q(95 , 3)=-2.66002 | q(95 , 4)=-23 | q(95 , 5)= 12.99999 |
| q(96 , 1) = -49.00001 | q(96 , 2)=-21.8767 | q(96 , 3)= 43.87669 | q(96 , 4)=-23 | q(96 , 5)= 12.99999 |
| q(97 , 1) = -49.00001 | q(97 , 2)= 71.459010 | q(97 , 3)=-49.45902 | q(97 , 4)=-23 | q(97 , 5)= 12.99999 |
| q(98 , 1) = -49.00001 | q(98 , 2)= 6.85845 | q(98 , 3)= 15.14154 | q(98 , 4)=-23 | q(98 , 5)= 12.99999 |
| q(99 , 1) = -49.00001 | q(99 , 2)=-135.76151 | q(99 , 3)= 157.7615 | q(99 , 4)=-23 | q(99 , 5)= 12.99999 |
| q(100 , 1) = -49.00001 | q(100 , 2)= 29.96985 | q(100 , 3)=-7.96986 | q(100 , 4)=-23 | q(100 , 5)= 12.99999 |

Dall'osservazione delle 5 colonne degli elementi q(k, h) si può rilevare quanto segue:

- gli elementi q(h , 1) della **prima** colonna risultano essere tutti dello stesso segno ed in questo caso particolare tutti uguali e pari al valore - 49.00001; pertanto si deduce che si ha una radice reale di valore $x_1 = q(100 , 1) = - 49.00001$

- gli elementi della **seconda** colonna, vale i valori q(h, 2) si susseguono con valori sia positivi che negativi e sono anche abbastanza diversi .fra loro; lo stesso discorso vale per gli elementi q(h, 3) relativi alla terza colonna. Pertanto da questi elementi q(h, 2) e q(h, 3) si possono ricavare le due radici complesse e coniugate prendendo in considerazione gli elementi delle due ultime righe, e precisamente q(99 , 2), q(100, 2) e q(100, 3) . Da questi tre valori si ricavano i valori del fattore quadratico del tipo $x^2 - r \cdot x - s$ da cui si estraggono con le ben note formule per l'equazione di 2° grado le due radici complesse e coniugate.

Tenendo conto delle formule (3) e(4), in questo specifico caso si ricavano i seguenti valori per r ed s:

$$r = q(100,2) + q(100,3) = 29.96985 + (-7.96986) = 21.99999$$

$$s = -(q(99,2) \cdot q(100,3)) = -(-135.76151) \cdot (-7.96986) = -1082.000228$$

si ottiene così il seguente fattore quadratico: $x^2 - 21.99999x + 1082.00028$

da cui si ricavano le due radici complesse e coniugate :

$$x_2 = \frac{21.99999 - \sqrt{21.99999^2 - 4 \cdot 1082.00028}}{2} = 10.999995 - i31.00000629$$

$$x_3 = \frac{21.99999 + \sqrt{21.99999^2 - 4 \cdot 1082.00028}}{2} = 10.999995 + i31.00000629$$

Esaminando infine la quarta e quinta colonna si osserva facilmente che si hanno in corrispondenza le due seguenti radici reali :

$$x_4 = q(100 , 4) = - 23$$

$$x_5 = q(100 , 5) = 12.99999$$

Se avessimo effettuato i calcoli in aritmetica a doppia precisione avremmo trovato i seguenti risultati per le cinque radici:

$$x_1 = - 49.000000000000027$$

$$x_2 = 10.999999999999994 + i 31.00000000000117$$

$$x_3 = 10.999999999999994 - i 31.00000000000117$$

$$x_4 = - 22,999999999999993$$

$$x_5 = 12.999999999999993$$

molto più vicini agli effettivi valori delle radici dell' equazione (5) che sono i seguenti:

$$x_{1e} = - 49 ; \quad x_{2e} = 11 + i 31; \quad x_{3e} = 11 - i 31 ; \quad x_{4e} = -23 ; \quad x_{5e} = 13$$

Si osservi che per questa equazione la differenza tra il valore effettivo e quello trovato per ognuna delle cinque 5 radici (vale a dire l'errore commesso utilizzando l'algoritmo in questione) risulta in valore assoluto molto piccola e precisamente

$$\text{per } x_{1e} \quad |x_{1e} - x_1| < 2.71 \cdot 10^{-13}$$

$$\text{per } x_{2e} \quad |x_{2e} - x_2| < 6.1 \cdot 10^{-14} \text{ per la parte reale} \quad \text{e } < 1.2 \cdot 10^{-12} \text{ per quella immaginaria}$$

$$\text{per } x_{3e} \quad |x_{3e} - x_3| < 6.1 \cdot 10^{-14} \text{ per la parte reale} \quad \text{e } < 1.2 \cdot 10^{-12} \text{ per quella immaginaria}$$

$$\text{per } x_{4e} \quad |x_{4e} - x_4| < 7.1 \cdot 10^{-14}$$

$$\text{per } x_{5e} \quad |x_{5e} - x_5| < 7 \cdot 10^{-14}$$

2.1 - Pregi, difetti e limitazioni dell'algoritmo Q - D

Per questo algoritmo si elencano qui di seguito i pregi ed anche i diversi difetti e le limitazioni.

Pregi:

- 1) le radici vengono trovate simultaneamente tutte insieme e a differenza di quanto viene fatto nell'algoritmo di Bairstow o in altri algoritmi non necessita di una preventiva conoscenza di parametri particolari;
- 2) se l'equazione algebrica presenta tutti i gradi dell'incognita e non ha radici reali effettive di valore opposto l'algoritmo, tranne in casi di particolari equazioni, converge verso tutti i valori delle effettive radici anche se i valori trovati possono risultare meno approssimati di quelli ottenibili con altri metodi iterativi a parità di numero di iterazioni;

Difetti e limitazioni :

- 1) se l'equazione algebrica non è formata da tutti i gradi della x o presenta coefficienti consecutivi di uguale valore l'algoritmo non risulta applicabile
- 2) se nell'effettuazione dei calcoli dovesse risultare un valore di $q(h, k) = 0$ non si potrebbe più procedere come risulta evidente osservando la relazione (2a) sopra riportata
- 3) per diversi tipi di equazioni non tutti i valori trovati per le radici risultano approssimati ai valori esatti delle radici; inoltre per altri tipi di equazione risulta molto difficile discriminare alcune radici complesse dalle reali pur tenendo conto di quanto esposto nei punti 1R e 1C.
- 4) se l'equazione ha radici effettive di valore opposto o quasi i valori ottenibili per questo tipo di radici risultano essere non bene approssimati ai veri valori delle radici o addirittura errati.
- 5) per trovare valori sufficientemente prossimi a quelli effettivamente posseduti dalle radici può essere necessario un numero grande di iterazioni (nell'esempio illustrato sopra le iterazioni sono state 100)
- 6) se l'equazione presenta radici doppie o in generale radici multiple anche per questo tipo di radici non si hanno delle buone approssimazioni, difetto questo comune anche ad altri algoritmi di tipo iterativo.

Ai difetti o limitazioni di cui ai punti 1) e 2) si può porre rimedio operando come segue.

A) Data l'equazione algebrica $f(x)=0$ non avente tutti i gradi della x posto $e \ y = x - c$ con c numero intero positivo o negativo, si fa uso dell'operazione della *divisione sintetica ripetuta* per trovare i coefficienti della equazione $f(y) = 0$ nella nuova incognita y . Se questa nuova equazione $f(y) = 0$ presenta per la incognita y tutti i gradi si procede con l'algoritmo Q - D a trovare i valori approssimati delle sue radici.

Se $f(y)=0$ non presenta ancora tutti i gradi si prende in considerazione un altro valore di c fino a che non si riesce ad avere un adeguato valore di c . Per passare quindi ai valori approssimati delle radici della $f(x) = 0$ essendo $x = y + c$ si hanno le seguenti relazioni :

ad ogni radice reale y_r di $f(y) = 0$ corrisponde una radice reale $x_r = y_r + c$ di $f(x)$;

ad ogni coppia di radici $y_{re} \pm i y_{im}$ complesse e coniugate di $f(y)$ corrisponde una coppia di radici complesse e coniugate $x_{re} \pm i x_{im} = (y_{re} + c) \pm i y_{im}$ di $f(x)$

Per la situazione in cui si ha un elemento $q(h,k) = 0$ si procede come sopra.

B) I difetti riportati ai punti 3) e 4) risultano abbastanza critici anche se riguardano solo particolari tipi di equazioni algebriche che hanno peculiari coefficienti o particolari radici. Ci si può accorgere in molti casi se si

tratta dei suddetti tipi di equazione dai risultati ottenuti. In effetti detto x_i il generico valore trovato relativo ad una radice dell'equazione $f(x) = 0$ si può calcolare il valore che il polinomio $f(x)$ assume in corrispondenza a tale valore, cioè si calcola $f(x_i)$ utilizzando ad esempio l'efficiente algoritmo di Horner. Se il valore $f(x_i)$ così trovato risulta essere molto diverso dal valore nullo, ciò potrebbe significare che x_i non è un valore attendibile per essere una effettiva radice dell'equazione.

Il difetto di cui al punto 5) non risulta critico in quanto con la rapidità dei tempi di calcolo degli odierni PC anche con 200 iterazioni i tempi per ottenere tutti i valori approssimati delle radici sono praticamente di qualche frazione di secondo.

Per il difetto del punto 6) come succede in relazione anche per altri metodi di tipo iterativo non risulta esserci nessun rimedio

2.2 Esempio di risoluzione

Prima di passare all'algoritmo di BAIRSTOW si mostra quest'altro esempio di risoluzione con l'algoritmo Q-D.

Esempio : si voglia risolvere la seguente equazione $f(x) = 0$ di 8° grado:

$$x^8 - 51x^7 - 3603x^6 + 322395x^5 - 7591423x^4 + 3827411x^3 + 2569178243x^2 - 40948983035x + 215287250062 = 0$$

le cui radici esatte hanno i seguenti valori ⁽¹⁾ :

$$x_1 = -74 \quad x_2 = 43 \quad x_3 = 31 \quad x_4 = -19 \quad x_5 = 13 - i8 \quad x_6 = 13 + i8 \quad x_7 = 22 - i3 \quad x_8 = 22 + i3$$

Effettuando i calcoli con l'algoritmo Q-D implicando 200 iterazioni si trovano per le radici i seguenti valori:

$$x_1 = -73.99999999999997$$

$$x_2 = 42.99999999999978$$

$$x_3 = 31.00000000000311$$

$$x_4 = -19.00000000003839$$

$$x_5 = 13.0000000000022 + i8.00000000013809$$

$$x_6 = 13.0000000000022 - i8.00000000013809$$

$$x_7 = 22.0000000001749 + i3.00000000009029$$

$$x_8 = 22.0000000001749 - i3.00000000009029$$

Dai valori di queste radici si può risalire facilmente ai quattro fattori quadratici $x^2 - r \cdot x - s$ di cui risulta composta l'equazione algebrica $f(x) = 0$ suddetta

Infatti per quel che riguarda le due coppie di radici complesse coniugate si hanno per r ed s i seguenti valori:

per la coppia x_7, x_8 posti $x_7 = c + id$ e $x_8 = c - id$

$$\text{si ha } r(1) = x_7 + x_8 = 2c = 44.00000000003499$$

$$s(1) = -x_7 \cdot x_8 = -(c^2 + d^2) = -493.0000000008239$$

per la coppia x_5, x_6 posto $x_5 = a + ib$ e $x_6 = a - ib$

$$\text{si ha } r(2) = x_5 + x_6 = 2a = 26.0000000000044$$

$$s(2) = -x_5 \cdot x_6 = -(a^2 + b^2) = -233.0000000002268$$

Riguardo alle radici reali, considerandole a coppie si possono ricavare i relativi valori di r e di s :

$$\text{per la coppia } x_1, x_2 \quad \text{si ha } r(3) = x_1 + x_2 = -31.0000000000019$$

$$s(3) = -x_1 \cdot x_2 = 3181.999999999982$$

$$\text{per la coppia } x_3, x_4 \quad \text{si ha } r(4) = x_3 + x_4 = 11.99999999996473$$

$$s(4) = -x_3 \cdot x_4 = 589.0000000012491$$

(1) si conoscono i valori esatti delle radici dell'equazione perché utilizzando sempre in linguaggio Qbasic un apposito programma realizzato dall'autore, l'equazione è stata costruita effettuando il prodotto di binomi e trinomi per i quali si erano scelti i loro coefficienti.

Allora l'equazione può essere scritta come segue:

$$f(x) = (x^2 - r(1) \cdot x - s(1)) \cdot (x^2 - r(2) \cdot x - s(2)) \cdot (x^2 - r(3) \cdot x - s(3)) \cdot (x^2 - r(4) \cdot x - s(4)) = 0$$

Si possono tenere presenti i quattro valori di $r(k)$ e di $s(k)$ perché la loro conoscenza ed il loro impiego potrebbe facilitare la ricerca delle radici di tale equazione quando si utilizza in successione al presente algoritmo l'algoritmo di Bairstow, che qui di seguito si passa a descrivere.

Si vuol far notare che anche implicando un numero di 200 iterazioni come nell'esempio riportato il tempo calcolo è risultato trascurabile.

3 - ALGORITMO di BAIRSTOW

Se all'algoritmo sopra illustrato si volesse far seguire nella risoluzione di una equazione algebrica l'algoritmo di Bairstow si potrebbe arrivare alla determinazione di valori numerici più prossimi all'esatto valore delle radici in diversi casi con un esiguo numero di iterazioni

L'utilizzo dell'algoritmo Q-D potrebbe risultare determinante anche in alcuni casi di difficile risoluzione di una equazione con l'algoritmo di Bairstow.

Non è qui il caso di addentrarci in un'esposizione dettagliata di questo algoritmo.

Per chi volesse avere una più estesa documentazione sull'argomento faccia riferimento a [6], [7], [9] [10].

Si da invece qui un breve cenno sulle modalità generali su cui è basato il metodo.

In pratica data l'equazione algebrica $f(x) = 0$ sul polinomio $f(x)$ viene effettuata per ognuno dei fattori quadratici del tipo $x^2 - r \cdot x - s$ che lo compongono una ricerca reiterata dei valori di r e di s mirata a trovare per tali due parametri dei valori numerici i più prossimi possibile agli effettivi valori che rendono il fattore quadratico un perfetto divisore del polinomio $f(x)$.

Indicheremo qui di seguito brevemente i passi più salienti dell'algoritmo.

Sia data la seguente equazione algebrica :

$$a(1) \cdot x^n + a(2) x^{n-1} + a(3) \cdot x^{n-2} + \dots + a(n-2) \cdot x^3 + a(n-1) \cdot x^2 + a(n) \cdot x + a(n+1) = 0$$

dove i coefficienti $a(k)$ con l'indice $k=1,2,3,\dots,n+1$ sono numeri reali,

indicando sinteticamente con $A(x) = 0$ la suddetta equazione, per il calcolo delle sue radici siano esse coppie di valori reali o coppie di valori complessi e coniugati si procede come segue:

si prendono in considerazione dei valori di partenza r ed s (valori arbitrari o trovati precedentemente con l'algoritmo Q - D relativi al fattore quadratico $x^2 - r \cdot x - s$) e s'impone la seguente uguaglianza:

$A(x) = (x^2 - r \cdot x - s) \cdot B(x) + R_b$ con R_b e $B(x)$ rispettivamente resto e quoziente della divisione del polinomio $A(x)$ di grado n per il fattore quadratico $x^2 - r \cdot x - s$. Il polinomio $B(x)$ è ovviamente un polinomio di grado $n-2$.

Utilizzando l'algoritmo della doppia divisione sintetica di $A(x)$ per il fattore quadratico si possono trovare i coefficienti del polinomio $B(x)$ applicando la seguente formula ricorsiva:

$$b(k) = a(k) - r \cdot b(k-1) - s \cdot b(k-2) \tag{6}$$

per $k = 2,3,4 \dots n-1$ e con i valori iniziali $b(1) = a(1)$ e $b(2) = a(2) + r \cdot b(1)$

Il resto R_b della suddetta divisione risulta opportuno metterlo sotto la seguente forma:

$$R_b = b(n) \cdot (x - r) + b(n+1)$$

con

$$b(n) = a(n) + r \cdot b(n-1) + s \cdot b(n-2) \tag{7}$$

$$b(n+1) = a(n+1) + r \cdot b(n) + s \cdot b(n-1) \tag{8}$$

Tutti i coefficienti $b(k)$ con l'indice $k=1,2,3,\dots,n+1$ sono numeri reali

Si effettui ora un'ulteriore doppia divisione sintetica del polinomio $B(x)$ sempre per lo stesso fattore quadratico e cioè :

$B(x) = (x^2 - r \cdot x - s) \cdot C(x) + R_c$; vale anche qui la seguente formula ricorsiva per il calcolo dei coefficienti polinomio $C(x)$: $\mathbf{c(h)} = \mathbf{b(h)} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{c(h-1)} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{c(h-2)}$ per $h = 2, 3, 4, \dots, n$ (9)
con i valori iniziali $\mathbf{c(1)} = \mathbf{b(1)}$ e $\mathbf{c(2)} = \mathbf{b(2)} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{c(1)}$

Siano r_e e s_e i valori dei due parametri di s e di r tali per cui il fattore $(x^2 - r_e \cdot x - s_e)$ risulterebbe essere un divisore perfetto di $A(x)$, tale cioè per cui si avrebbe resto $R_b = 0$ e quindi: $b(n) = 0$ e $b(n+1) = 0$.

Posto $\Delta r = r_e - r$ e $\Delta s = s_e - s$

Si può dimostrare allora che valgono le seguenti relazioni:

$$- \mathbf{b(n)} = \mathbf{c(n-1)} \cdot \Delta \mathbf{r} + \mathbf{c(n-2)} \cdot \Delta \mathbf{s} \quad (10)$$

$$- \mathbf{b(n+1)} = \mathbf{c(n)} \cdot \Delta \mathbf{r} + \mathbf{c(n-1)} \cdot \Delta \mathbf{s} \quad (11)$$

Risolvendo il suddetto sistema nelle due incognite Δr e Δs si trova :

$$\Delta r = \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} \quad \text{e} \quad \Delta s = \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2}$$

$$\text{con} \quad \Delta r_1 = b((n+1)) \cdot c(n-2) - b((n)) \cdot c(n-1) \quad \Delta r_2 = c(n-1) \cdot c(n-1) - c(n) \cdot c(n-2)$$

$$\Delta s_1 = b((n+1)) \cdot c(n-1) - b((n)) \cdot c(n) \quad \Delta s_2 = \Delta r_2 = c(n-1) \cdot c(n-1) - c(n) \cdot c(n-2)$$

Per rendere $b(n) = 0$ e $b(n+1) = 0$ o per lo meno molto piccoli occorre che Δr e Δs siano anch'essi molto piccoli.

Ciò lo si può ottenere con la seguente sequenza di operazioni :

- 1) partendo da valori di r e di s abbastanza vicini ai valori r_e e s_e si calcolano i primi valori di Δr e di Δs con le formule sopra riportate
- 2) una volta trovati tali valori si aggiornano i valori di r e di s ponendo $\mathbf{r} = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ e $\mathbf{s} = \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}$; e con questi valori aggiornati si calcolano di nuovo con la formula ricorsiva (6) i valori dei coefficienti $b(k)$ e con la formula ricorsiva (9) i coefficienti $c(h)$.
- 3) posti i nuovi valori di $b(n)$, $b(n+1)$; $c(n-2)$, $c(n-1)$, $c(n)$ nelle formule (10) e (11) si ricalcolano i valori di Δr e di Δs .

Ora, se i valori di r e di s di partenza sono scelti sufficientemente prossimi agli effettivi valori r_e e s_e si constata che questi nuovi valori di Δr e di Δs risultano più piccoli dei precedenti.

Continuando ulteriori iterazioni di sequenze di operazioni analoghe a quella sopra illustrata si vengono ad avere valori Δr e Δs sempre più piccoli, tendendo entrambi sostanzialmente a zero: ad esempio dopo un certo numero di iterazioni si otterranno per essi i seguenti valori

$$\Delta r \leq 10^{-9} \quad \Delta s \leq 10^{-9} .$$

Ciò comporta che anche i valori dei coefficienti $b(n)$ e $b(n+1)$ risultano molto piccoli come risulta evidente dalle formule (10) e (11).

Pertanto anche il resto R_b risulterà tanto più trascurabile quanto più piccoli saranno Δr e Δs .

Otterremo così praticamente $A(x) = (x^2 - r \cdot x - s) \cdot B(x) + R_b \cong (x^2 - r_e \cdot x - s_e) \cdot B(x)$

Dato però che non si conoscono a priori le radici dell'equazione che si vuole risolvere, sono ignoti gli opportuni valori di r e di s relativi a ciascun fattore quadratico da cui iniziare la ricerca di ciascuna radice. Rimane pertanto da stabilire quali sono questi valori iniziali.

La difficoltà principale quindi dell'algoritmo di Bairstow è proprio data dal non conoscere a priori da quali valori iniziali è conveniente partire per r e per s , tali da non portare i calcoli iterativi in overflow, ma di trovare invece dopo un certo numero, possibilmente piccolo di iterazioni, valori numerici anche se approssimati ai veri valori delle radici.

Nella letteratura tecnica dedicata a questo algoritmo si suggerisce spesso di prendere come valori iniziali per r ed s i seguenti valori: $r = 0$, $s = 0$, suggerendo altresì di prender altri valori se essi non fossero tali da portare alla scoperta di valori anche approssimati di una coppia di radici.

Per molte equazioni, specie di grado non elevato e con coefficienti non eccessivamente grandi, partendo con tali valori iniziali si riescono effettivamente a trovare i valori approssimati delle radici

Per non dover procedere tuttavia ad una scelta casuale e spesso inefficace per i valori iniziali di r e di s si possono seguire due metodi

- a) se si è anteriormente impiegato l'algoritmo Q-D per la risoluzione dell'equazione invece di scegliere a caso i valori di r e di s risultano disponibili con una sufficiente approssimazione la coppia di valori r e s relativa ad ogni fattore quadratico che compone la equazione algebrica; pertanto inserendo questi valori è possibile ottenere con un numero limitato di iterazioni i valori delle radici con una approssimazione anche migliore di quella ottenuta con l'algoritmo Q-D.

Questo metodo non sempre dà ottimi risultati in quanto date le diverse limitazioni ed i difetti che presenta l'algoritmo Q - D non sempre i valori di r ed s ricavati da esso risultano convenienti ed applicabili.

- b) si può procedere ad una sistematica ed automatica introduzione ordinata di diversi valori di r e di s attraverso ad esempio l'esplorazione esaustiva di tutte le coppie per r ed s che si possono avere entro ben determinati campi di valori per r e per s . In tale ricerca può accadere che molte coppie di valori r ed s non siano idonee in quanto i valori trovati di Δr e di Δs nelle successive iterazioni invece di diminuire, aumentano progressivamente anche a dismisura, col rischio di portare i calcoli ad una condizione di trabocco. Pertanto si devono prendere opportuni provvedimenti al fine di evitare questa evenienza e continuare poi la ricerca automatica di altri valori di r e di s , atti a far diventare sempre più piccoli ad ogni iterazione i valori di Δr e di Δs .

3.1 - Esempio di risoluzione

Utilizziamo ora algoritmo di Bairstow per trovare le radici della seguente equazione:

$$x^8 - 51x^7 - 3603x^6 + 322395x^5 - 7591423x^4 + 3827411x^3 + 2569178243x^2 - 40948983035x + 215287250062 = 0$$

che già avevamo preso in esame con l'algoritmo Q-D.

Per risolvere questa equazione viene utilizzato il programma in Qbasic riportato nel listato nell'**ALLEGATO 2**, Tale listato tuttavia viene riportato nell'articolo solo nella versione digitale della presente Rivista. Tale programma è realizzato per operare con il metodo del tipo indicato in b)

Eseguendo il programma si ottengono per le 8 radici i seguenti valori :

$$x(1) = 42.999999999999994$$

$$x(2) = -74$$

$$x(3) = 31.00000000000323$$

$$x(4) = -19.0000000000001$$

$$x(5) = 22.0000000000239 + i 3.00000000016186$$

$$x(6) = 22.0000000000239 - i 3.00000000016186$$

$$x(7) = 12.9999999999607 + i 8.00000000000359$$

$$x(8) = 12.9999999999607 - i 8.00000000000359$$

Poiché le effettive radici dell'equazione hanno i seguenti valori

$$x(1) = 43; \quad x(2) = -74; \quad x(3) = 31; \quad x(4) = -19 \quad x(5) = 22 - i 3; \quad x(6) = 22 + i 3; \quad x(7) = 13 + i 8; \quad x(8) = 13 - i 8$$

i valori trovati possono considerarsi accettabili come radici dell'equazione essendo delle loro buone approssimazioni (il massimo errore commesso risulta sulla parte immaginaria della coppia di radici

$$x(5) \text{ e } x(6): \varepsilon = 1.6186 \cdot 10^{-11}). \text{ Più avanti si vedrà come può effettuarsi una verifica sui valori ottenuti.}$$

3.2 Equazioni Algebriche con radici multiple

In caso di equazioni che hanno radici multiple i valori trovati delle radici utilizzando l'algoritmo di Bairstow e in vari altri metodi iterativi dedicati al calcolo delle radici si viene a perdere la convergenza quadratica passando ad una convergenza lineare tanto più lenta quanto più alto è il grado di molteplicità delle radici ed ottenendo in genere valori numerici meno precisi per le radici.

Per ovviare a questo inconveniente si può procedere nella seguente maniera:

sia $P(x) = 0$ una equazione di grado n con radici multiple; una volta calcolate le sue radici, ad esempio con l'algoritmo di Bairstow, dall'esame e dall'osservazione dei valori numerici trovati si può intravedere e capire se vi sono effettivamente delle radici multiple anche se per esse si sono ottenuti valori poco precisi. Si consideri ora il polinomio ottenuto da $P(x)$ derivando ciascun suo termine, polinomio che denoteremo come la derivata prima di $P(x)$ e indicheremo con il simbolo $P'(x)$. Si può facilmente dimostrare che se $P(x)$ possiede una radice di molteplicità m la sua derivata $P'(x)$, risulta avere la stessa radice ma con molteplicità $m-1$ [11],[12]

Si può poi ricavare inoltre il polinomio $Q(x)$ contenente con molteplicità 1 tutte e sole le radici di tipo multiplo di $P(x)$ tramite la seguente formula $Q(x) = \frac{P(x)}{M(x)}$ dove il polinomio $M(x)$ risulta essere il Massimo Comune Divisore fra $P(x)$ e $P'(x)$. [11],[12].

Esempio: consideriamo la seguente equazione di 7° grado:

$$P(x) = x^7 - 24x^6 + 269x^5 - 1810x^4 + 7060x^3 - 12248x^2 - 15708x + 113288 = 0$$

che sappiamo avere le seguenti radici esatte: 2, 7, 7, $3 \pm i5$, $3 \pm i5$;

Risolvendo l'equazione con Bairstow si trovano i seguenti valori:

I VALORI TROVATI PER LE 7 RADICI DELL'EQUAZIONE SONO:

$$x(1) = 6.999999936399882$$

$$x(2) = -2$$

$$x(3) = 3.000000025970351 + i 4.999999983662976$$

$$x(4) = 3.000000025970351 - i 4.999999983662976$$

$$x(5) = 2.999999974029648 + i 5.000000016337024$$

$$x(6) = 2.999999974029648 - i 5.000000016337024$$

$$x(7) = 7.00000006360012$$

Dall'esame dei suddetti valori si può facilmente vedere che l'equazione possiede delle radici doppie.

Derivando ora la suddetta equazione; si ottiene l'equazione seguente:

$$P'(x) = 7x^6 - 144x^5 + 1345x^4 - 7240x^3 + 21180x^2 - 24496x - 15708 = 0$$

Risolvendola si ottengono per le sue radici questi valori .

$$x(1) = 7$$

$$x(2) = -.4433325806250588$$

$$x(3) = 4.007380576026818 + i 2.282190039808705$$

$$x(4) = 4.007380576026818 - i 2.282190039808705$$

$$x(5) = 2.999999999999998 + i 5.000000000000002$$

$$x(6) = 2.999999999999998 - i 5.000000000000002$$

prendendo in considerazione i valori $x(1)$, $x(5)$ e $x(6)$ delle radici della $P'(x)$ e paragonandoli ai valori della $P(x)$ che sono relativi alle sue radici doppie, si vede chiaramente che tali valori sono molto più vicini se non addirittura uguali alle vere radici rispetto a quelli ottenuti risolvendo la $P(x) = 0$.

4 – CONTROLLI E VERIFICHE

Una volta trovati con l'utilizzo dei suddetti algoritmi i valori che si ritengono essere i valori più o meno approssimati alle effettive radici della equazione in esame, risulterebbe opportuno avere disponibile un metodo in grado di controllare se questi valori si possono considerare sufficientemente prossimi o uguali alle vere radici dell'equazione.

Nella maggior parte degli esempi riportati nel listato relativo al programma dedicato al metodo di Bairstow, vengono date equazioni di cui si conoscono a priori le vere radici come ad esempio quella sopra illustrata.

In effetti i coefficienti di queste equazioni sono stati calcolati con l'utilizzo di un apposito programma sempre in Qbasic, che qui non si riporta, operando come segue: per ciascuna equazione $P(x)=0$ che si vuole realizzare si costruisce il relativo polinomio effettuando il prodotto di binomi o di trinomi (fattori quadratici) ciascuno dei quali è costituito da ben determinati valori numerici considerati come loro coefficienti.

Si è voluto così procedere per poter controllare e vedere da un semplice confronto fra i conosciuti i valori delle vere radici ed i valori ottenuti quanto quest'ultimi si discostano dalla effettivi valori delle radici e ricavare e conoscere quindi l'errore commesso.

Ma per una equazione algebrica di cui non si conoscono a priori le radici esiste un metodo per verificare dai risultati ottenuti la bontà dei valori che si ritengono essere le sue radici?

La risposta in linea teorica è affermativa: bisogna tuttavia tenere presente le limitazioni di precisione di calcolo di cui è affetta l'aritmetica utilizzata (nel nostro caso aritmetica in doppia precisione a virgola mobile con mantissa di lunghezza fissa di 16 cifre).

Partendo dal fatto ovvio che il polinomio $P(x)$ ha valore nullo se x è una sua radice il metodo banale è quello della semplice sostituzione dell'incognita x con il valore reale x_0 o complesso $x_0 + i y_0$ trovato per la radice ed il conseguente calcolo delle sue varie potenze, seguito dai vari prodotti di queste potenze per i relativi coefficienti dell'equazione ed infine dalla somma algebrica totale di questi prodotti tenendo sempre conto di separare fra loro i valori reali e complessi trovati durante i calcoli

Esiste tuttavia un metodo molto più efficiente di quello sopra accennato, noto come algoritmo di HORNER, in quanto esso implica un consistente minor numero di operazioni aritmetiche da effettuare. Tale algoritmo infatti è dedicato proprio al calcolo del valore numerico di un polinomio algebrico $P(x)$ per il valore di x preso in considerazione. Per tale algoritmo, esteso nel campo delle variabili complesse [13], è stato quindi realizzato un semplice programma in QBASIC il cui listato, composto da un esiguo numero di istruzioni non viene riportato nella presente versione dell'articolo. Con questo programma pertanto si può calcolare per un valore reale x_0 il valore numerico reale di $P(x_0) = G(x_0)$ ed in corrispondenza ad un valore complesso $x_0 + i y_0$ il valore numerico complesso $P(x_0 + i y_0) = G(x_0, y_0) + i H(x_0, y_0)$.

Pertanto se x_0 fosse un effettiva radice reale dell'equazione si avrebbe $G(x_0) = 0$; come pure se $x_0 + i y_0$ fosse un effettiva radice complessa dell'equazione si avrebbe $G(x_0, y_0) = 0$ e $H(x_0, y_0) = 0$

E' lecito quindi supporre che per il valore x_0 trovato quanto più $G(x_0)$ risulta prossimo allo zero tanto più x_0 risulta essere una buona approssimazione all'effettivo valore della radice. Così pure per il valore $x_0 + i y_0$ trovato: quanto più $G(x_0, y_0)$ e $H(x_0, y_0)$ risultano prossimi allo zero, tanto più $x_0 + i y_0$ risulta essere una buona approssimazione all'effettivo valore della radice.

Bisogna tuttavia tener conto, come già sottolineato, della precisione di calcolo in quanto, pur utilizzando la aritmetica in doppia precisione, quando si effettuano operazioni aritmetiche fra valori numerici sia interi e non, costituiti da molte cifre, tale aritmetica presenta delle limitazioni di precisione dovute agli inevitabili arrotondamenti e troncamenti nei calcoli che possono portare a risultati approssimati o addirittura inaccettabili.

Pertanto per quelle equazioni per le quali si sono trovate radici di valore grande si possono ottenere dei valori alquanto diversi da zero per $P(x)$ anche se il valore di x in esame risulta essere un ottima approssimazione all'effettivo valore della radice (vedi 2° ESEMPIO)

1° ESEMPIO

Dato il polinomio $P(x) = x^7 + 5x^6 - 34x^5 + 3x^4 - 18x^3 - 64x + 2$ si voglia risolvere l'equazione $P(x) = 0$. Utilizzando il programma in ALLEGATO 2 relativo al metodo di Bairstow si trovano per le 7 radici dell'equazione i seguenti valori:

$$\begin{aligned} x(1) &= 3.898415710352644 \\ x(2) &= -8.889486988062991 \\ x(3) &= -.7366098098292232 + i .8605328653206531 \\ x(4) &= -.7366098098292232 - i .8605328653206531 \\ x(5) &= .7165247222415944 + i .9624369445553462 \\ x(6) &= .7165247222415944 - i .9624369445553462 \\ x(7) &= 3.124145288560465D-02 \end{aligned}$$

Utilizzando il programma in ALLEGATO 3 o la parte di programma relativo alla verifica relativa all'algoritmo di Horner presente nell'ALLEGATO 2 viene calcolato il valore numerico del polinomio $P(x)$ per il valore ad esempio di $x = x(1)$.

Effettuando i calcoli si trova $P(x(1)) = 2.72249662789162 \cdot 10^{-10}$. Per i valori $x = x(3)$ e $x = x(4)$ si ottiene $P(x(3)) = P(x(4)) = (1.8237764449956169) \cdot 10^{-10} - i (1.608075050072225) \cdot 10^{-11}$

Anche per il valore di $P(x)$ calcolato per gli altri valori $x(2)$, $x(5)$, $x(6)$ e $x(7)$ si trovano dei valori numerici dello stesso ordine di grandezza di quelli trovati per $x(1)$ e per $x(3)$ vale a dire molto piccoli e quindi è lecito considerare i valori trovati proprio come radici dell'equazione o per lo meno delle ottime approssimazioni alle effettive radici.

2° ESEMPIO

Si consideri il seguente polinomio :

$$P(x) = x^5 - 1308660 x^4 + 428159526567 x^3 - 7706187060090 x^2 - 85201586567134 x + 827158696377720$$

l'equazione $P(x) = 0$ ha come effettive radici i seguenti valori: -12; 7; 23; 654321 - i 13; 654321 + i 13

Risolviendo l'equazione con l'ausilio del programma dell'ALLEGATO 2 si trovano per le radici i seguenti valori : -12; 7.000000000000001; 23; 654321 - i 13.00000002063238; 654321 + i 13.00000002063238

il valore $x_0 = 7.000000000000001$ potrebbe senz'altro da considerarsi accettabile come radice della suddetta equazione in quanto vi è un errore $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-16}$ fra il valore trovato e l'effettivo valore della radice.

Applicando ora il metodo di Horner per il valore $x = 7$ si ottiene correttamente $P(7) = 0$ mentre per il valore $x = 7.000000000000001$ si viene ad avere per $P(x) = -0.10498\dots$ che potrebbe essere considerato un accettabile valore di verifica.

Ma per i valori $x_1 = 654321 \pm i 13.00000002063238$ ottenuti al posto delle effettive radici, pur essendo affetti da un errore $< 3 \cdot 10^{-8}$ solo sulla parte immaginaria, si riscontrano per $P(x_1)$ dei valori sia per la sua parte reale che per la sua parte immaginaria non solo diversi da zero ma anche grandi. Pertanto sarebbero da non prendere in considerazione quali garanti dell'accettazione o meno del valore trovato quale valore radice dell'equazione.

Ciò è dovuto sostanzialmente alla propagazione ed all'accumulo degli errori di arrotondamento e di troncamento nei calcoli effettuati su numeri interi e non interi, composti da diverse cifre, che possono portare a valori errati sul risultato finale avendo usato una aritmetica, se pur a doppia precisione, che opera però su numeri a virgola mobile e con mantissa di lunghezza fissa prestabilita.

L'imprecisione nei calcoli per questo tipo di aritmetica può del resto essere messa in evidenza effettuando il semplice calcolo di $(7.000000000000001 - 7)$ che, eseguito con tale aritmetica risulta essere pari a:

1.003641.....D-13 mentre il suo evidente valore è dato da 1D-13

3° ESEMPIO

Dato il polinomio $P(x) = 25x^9 + 89x^8 - 41x^7 + 78x^6 - 92x^5 + 67x^4 + 512x^3 - 631x^2 + 10x + 53$

Si voglia risolvere l'equazione $P(x) = 0$

Utilizzando il programma in ALLEGATO 1 relativo al metodo Q-D si sono trovati per le 9 radici dell'equazione i seguenti valori:

radici reali:

$xr(1) = -4.171072612564805$ $xr(2) = -1.405104995540434$
 $xr(3) = .9256795247813259$ $xr(4) = .3576619480208132$ $xr(5) = -.2581278353479367$

radici complesse:

$xc(1) = -.4087905203203133 + i 1.538755139809708$
 $xc(2) = -.4087905203203133 - i 1.538755139809708$
 $xc(3) = .9042725056458745 + i .9230665105543054$
 $xc(4) = .9042725056458745 - i .9230665105543054$

Utilizzando il programma in ALLEGATO 3 relativo all'algorithmo di Horner si è calcolato il valore numerico del polinomio $P(x)$ in corrispondenza a ciascuna dei suddetti valori relativi alle radici e si sono avuti i seguenti risultati:

$P(xr1) = (2.56\dots) \cdot 10^{-9}$
 $P(xr2) = (-1.71\dots) \cdot 10^{-6}$
 $P(xr3) = (4.64\dots) \cdot 10^{-13}$
 $P(xr4) = (-1.88\dots) \cdot 10^{-12}$
 $P(xr5) = (-3.08\dots) \cdot 10^{-12}$
 $P(xc1) = P(xc2) = (2.24\dots) \cdot 10^{-8} - i (1.05\dots) \cdot 10^{-8}$
 $P(xc3) = P(xc4) = (5.95\dots) \cdot 10^{-7} + i (6.62\dots) \cdot 10^{-7}$

I valori numerici che si sono ottenuti per il polinomio $P(x)$ sono sufficientemente piccoli, tali quindi da poter concludere che i valori numerici trovati per le radici possono considerarsi accettabili.

Un'altra interessante controllo può essere effettuato sulle equazioni del tipo $x^n - 1 = 0$, confrontando i risultati numerici trovati per le radici, quando vengono utilizzati gli algoritmi illustrati con quelli ottenuti tramite la seguente nota formula relativa al calcolo delle n radici dell'unità :

$$e^{k \frac{2\pi}{n} i} = \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(k \frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{dove } i = \sqrt{-1} \quad (a)$$

Si può verificare così se i corrispondenti risultati numerici sono uguali o diversi

Esempio: data l'equazione $x^9 - 1 = 0$ prendiamo in considerazione i risultati numerici relativi ad una stessa coppia di radici complesse trovata usando sia l'algorithmo QD, sia l'algorithmo di Bairstow, sia la formula (a) in cui si è posto $n = 9$.

Si ottengono i seguenti valori

Per QD : $-0.9396926207851135 \pm i 0.3420201433238613$

Per Bairstow: $-0.9396926207859302 \pm i 0.3420201433256663$

per formula (a): $-0.9396926207859083 \pm i 0.3420201433256688$

si nota che per i tre diversi casi si ottengono valori che differiscono solo nelle cifre meno significative. Pertanto possiamo prendere come risultato accettabile e affidabile per detta radice il valore che presenta uguali cifre comuni in tutti e tre i casi e cioè: $0.939692620785 \pm i 0.34202014332$

5 - UNA APPLICAZIONE INTERESSANTE

Si voglia trovare nella ricerca degli zeri di una equazione, anche di grado abbastanza elevato, la sua radice reale xm più grande in valore assoluto.

1° esempio:

trovare la radice reale di valore assoluto più grande della equazione di 51° Grado che presenta i seguenti 52 coefficienti:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|------|------|------|------|
| 4 | -907 | 102 | -793 | 260 | 836 | -195 | -113 | 810 | -233 | 286 | 492 | -31 | 372 | -683 | -463 |
| 158 | -313 | -189 | -277 | -597 | -673 | 484 | -63 | 780 | -281 | 558 | 790 | -265 | -769 | 298 | 346 |
| 890 | -123 | -91 | 902 | -107 | 262 | -811 | 232 | -299 | 340 | 936 | -67 | 714 | 400 | -497 | 10 |
| 838 | 192 | -201 | -969 | | | | | | | | | | | | |

l'equazione è quindi la seguente :

$$4x^{51} - 907x^{50} + 102x^{49} - \dots + .838x^3 + 192x^2 - 201x - 969 = 0$$

utilizzando l'algoritmo di Bairstow ed eseguendo il relativo programma il valore trovato per la radice più grande in valore assoluto è $xm = 226.64134113010716$ e per calcolarlo è risultato necessario un tempo di 32.5 secondi.

Utilizzando l'algoritmo Q-D, eseguendo il relativo programma limitiamoci a considerare il primo valore calcolato per le radici. Tale valore è $xm = 226.64134113010716$ che risulta uguale a quello trovato con l'algoritmo di Bairstow, ma con un tempo di calcolo praticamente immediato (0.05 secondi)

Avere trovato lo stesso valore per la radice più grande della presente equazione con due algoritmi così diversi fra loro permette di supporre che tale valore sia effettivamente valido.

2° esempio:

Trovare la radice reale xm di valore assoluto più grande dell equazione di 74° Grado che presenta i seguenti 75 coefficienti:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| 1196 | -56665 | 76472 | -30765 | 25040 | -99351 | -653 | 11704 | 54390 | 83854 | -19253 | -19383 | 15898 | 28978 | -45085 |
| -21801 | 58684 | -70403 | -42037 | 37880 | -63987 | 56280 | -77681 | -28731 | 48050 | 8112 | -32595 | -6795 | -71577 | -39709 |
| -51831 | -92931 | 7606 | 14634 | -83317 | 20022 | -99437 | 566 | -62579 | -59797 | 67232 | 48738 | 5176 | -31635 | -16103 |
| 20978 | -76675 | 30420 | 28730 | 48056 | 8088 | 36258 | 75798 | -31929 | -13191 | 58090 | 72146 | 38606 | -59021 | 69430 |
| 44028 | -27125 | 68654 | 45656 | 19026 | 25580 | -90929 | -9975 | 2472 | 44536 | 24534 | -7581 | 19024 | 25638 | -90031 |

l'equazione è quindi la seguente :

$$1196x^{74} - 56665x^{73} + 76472x^{72} - \dots - 7581x^3 + 19024x^2 + 25638x - 90031 = 0$$

Con l'algoritmo di Bairstow si trova : $xm = 46.00074915690124$ con un tempo di calcolo di 57 secondi

Con l'algoritmo Q-D si trova : $xm = 46.00074915690122$ con un tempo di calcolo pari a 0.06 secondi

La differenza fra i due valori trovati è solo sulla cifra decimale meno significativa.

3° esempio:

Trovare la radice reale xm di valore assoluto più grande della equazione di 97° Grado che presenta i seguenti 98 coefficienti:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| 12 | 818 | -221 | -515 | -939 | -63 | -647 | 544 | -835 | -197 | 68 | -687 | 454 | -201 | -951 | 50 | 692 | 444 |
| 250 | -995 | 4 | 948 | 54 | 442 | -261 | 818 | -221 | 524 | 906 | -103 | 698 | -431 | -319 | -133 | -515 | 940 |
| -63 | -713 | -401 | -489 | 42 | 464 | 152 | -577 | 732 | -365 | 736 | 358 | 788 | 268 | -719 | -389 | 564 | 772 |
| 294 | -397 | -515 | 940 | -63 | 790 | 264 | 782 | -277 | 602 | 660 | 514 | 944 | -59 | -861 | 160 | -223 | 466 |
| 144 | 940 | -63 | 824 | -213 | -693 | -441 | -263 | 796 | 256 | 904 | -105 | -511 | -953 | 48 | -559 | -787 | -269 |
| 710 | 408 | 450 | 220 | 534 | 872 | 146 | 838 | | | | | | | | | | |

l'equazione è quindi la seguente:

$$12x^{97} + 818x^{96} - 221x^{95} - \dots + 534x^3 + 872x^2 + 146x + 838 = 0$$

Con l'algoritmo di Bairstow si trova : $xm = -68.42688856393865$ con un tempo di calcolo di 85 secondi

Con l'algoritmo Q-D si trova : $xm = -68.42688856393869$ con un tempo di calcolo pari a 0.06 secondi

La differenza fra i due valori trovati è solo sulla cifra decimale meno significativa.

6 - CONCLUSIONI

Dai risultati ottenuti risolvendo molte equazioni di grado diverso si può arrivare a concludere che il metodo di Bairstow è preferibile al metodo Q-D dati le limitazioni ed i difetti che quest'ultimo algoritmo presenta.

Inoltre in generale si è potuto constatare che i valori trovati relativi alle radici di una equazione risultano più precisi se ottenuti con Bairstow rispetto a quelli ottenuti con il metodo Q-D e ciò risulta tanto più evidente quanto più alto è il grado dell'equazione.

Pertanto il programma relativo all'algoritmo di Bairstow in relazione alla risoluzione di una generica equazione algebrica risulta senz'altro da preferire rispetto al programma relativo al calcolo che utilizza l'algoritmo Quoziente-Differenza (Q-D)

Quest'ultimo algoritmo risulta interessante perché esso permette la simultanea ricerca di tutte le radici di una equazione senza alcuna preventiva implicazione di eventuali parametri: con esso però, non si può avere la certezza che i valori trovati per una qualsiasi equazione rappresentino più o meno approssimati i valori delle radici dell'equazione in quanto come già messo in evidenza per alcuni tipi particolari di equazioni si trovano o valori molto imprecisi od addirittura errati.

Ciò non di meno in alcuni casi potrebbe risultare interessante risolvere l'equazione anche con l'algoritmo Q-D per comparare fra loro i risultati ottenuti con l'uno e con l'altro algoritmo, ma soprattutto perché in alcuni casi si riescono ad ottenere per l'algoritmo di Bairstow dei risultati con un minor di iterazioni sfruttando i risultati ottenuti con l'impiego del QD.

L'utilizzo dell'algoritmo Q-D risulta inoltre di notevole interesse quando si vuole calcolare e trovare fra tutte le radici reali di un'equazione quella di **valore assoluto più grande**. Si è potuto riscontrare infatti (vedi ad esempio il punto 5) in tutti gli esempi di equazioni risolte che tale tipo di radice risulta ovviamente avere uguale valore tranne al limite la cifra meno significativa, sia se calcolato con l'uno o con l'altro algoritmo, ma con la differenza che con l'algoritmo Q-D il calcolo di tale radice è praticamente immediato perché è il primo valore che viene trovato, mentre con l'algoritmo di Bairstow molto spesso è l'ultimo ad essere calcolato. Pertanto con Bairstow il suo valore non comparirà immediatamente, ma solo alla fine della ricerca di tutte le radici e quindi anche dopo diversi secondi se il grado dell'equazione è abbastanza grande.

Si vuole infine fare presente che la risoluzione di equazioni algebriche anche di grado elevato può essere attuata con l'utilizzazione dell'opportuno Eseguitore presente su questo Sito nella sezione Software dedicata all'autore..

RIFERIMENTI

- [0] M. Cipolla – *ANALISI ALGEBRICA*, Cap. XVIII, Terza Edizione 1948 - Editore G. Principato
- [1] M. Cipolla – *ANALISI ALGEBRICA*, Cap. XVI, Terza Edizione 1948 - Editore G. Principato
- [2] A. Bernardo - http://www.matematicamente.it/storia/l'equazione_di_terzo_grado.html
- [3] M.T. Mazzucato - <http://www.matematicamente.it/mazzucato/EquazioniAlgebriche.pdf>
- [4] E. Di Rienzo - <http://www.matematicamente.it/approfondimenti/index.html>
- [5] <http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/ae.htm>
- [6] C.F. Gerald, P.O. Wheatley - *Applied Numerical Analysis* – Third Edition 1984 Addison-Wesley Publishing Company
- [7] F. Sheid - *Analisi Numerica – Collana SCHAUM*, 1975 - Etas /Libri
- [8] <http://hcg1.eng.ohio-state.edu/~ce406/Chapt1/Chapt1.pdf>
- [9] <http://chml028.chml.ubc.ca/CHML/chbe330/notes/rootfind.doc>
- [10] <http://www.vialattea.net/esperti/mat/bairstow/bairstow.htm>
- [11] G. Clemente, C. Signorini- *Elementi di CALCOLO NUMERICO* – Patron Editore – Bologna 1974
- [12] G.B. De Sinno – *Corso completo di MATEMATICHE PURE*, Tomo Primo, Cap. XIV, Seconda Edizione – STAMPERIA del FIBRENO – NAPOLI 1850
- [13] E. Durand - *Solutions Numeriques des Equations Algebriques*, Tome I - Masson et C.ie Editeurs ,1960