ESTENSIONE DI GOLDBACH

a k = primi , con N e k entrambi pari o dispari

Gruppo Eratostene

Introduzione

La congettura di Goldbach può essere estesa a k primi con N e k entrambi pari o dispari, e in entrambi i casi con N multiplo di k:

"Ogni numero pari N $\geq$ k è somma di k numeri primi"

e ci sono G(N, k) k – uple di numeri primi dati dalla relazione seguente (estensione della formula per la stima delle coppie di Goldbach (k = 2), vedi lavori precedenti, Rif. 1). Idem con N e k dispari.

Formule ed esempi

Possiamo estendere a k primi la formula per la stima logaritmica delle G(N) coppie di Goldbach per k = 2 (la classica congettura forte di Goldbach):

$$G(N,2) \approx \quad G(N) \approx \frac{N}{(\ln N)^2}$$

nella formula più generale:

$$G(N, k) \approx \frac{N}{(\ln N)^{\mathbf{k}}} \qquad (1)$$

Per es. per N = 200 e per k = 4,

$$G(100, 4) \approx \frac{200}{(\ln 208)^{\mathbf{4}}} \approx \frac{200}{788{,}04} \approx 0{,}25 \approx 1$$

0,25 valore approssimato per difetto.

Costruzione delle coppie estese di Goldbach per k = 4: si dispongano i numeri dispari successivi fino ad N - 1 in k colonne alternativamente discendenti e ascendenti nel senso indicato dalle freccette), cambiando senso di "marcia" ad ogni numero N / k, 2 N / k, 3N / k, fino a (k-1) N / k; facciamo un esempio pratico per N = 200 e k = 4:

a + b + c + d = N = 200

↓		↓		
1	49	51	99	
3	**47**	**53**	**97**	**quartetto di primi con somma 200**
5	45	55	95	
7	**43**	57	93	
9	**41**	**59**	91	
11	39	**61**	89	
13	**37**	63	87	
15	35	65	85	
17	33	**67**	**83**	
19	**31**	69	81	
21	**29**	**71**	**79**	
23	27	**73**	77	
25	25	75	75	
	↑		↑	

Si divide N per 4 = k , e si scrivono in colonna i numeri dispari fino a N/4 = 200/4 = 25, poi si risale fino a 25 x 2 - 1 = 50; si riscende fino a 25 x 3 = 75, si risale fino a 25 x 4 -1 = 99. Ad ogni “tornata”, i primi o gli ultimi due numeri dispari possono essere uguali o no, il che però farà variare la somma finale N, fino a chè non si ottiene il numero N desiderato, in questo caso N = 200

La somma N dei quattro numeri dispari di ogni riga è sempre N = 200   Sottolineando i numeri primi, si osserva che nella seconda riga ci sono quattro numeri primi, **3, 47, 57 e 97**   la cui somma è N = **200**, che quindi ha   ***un*** solo quartetto di numeri primi come addendi : la congettura estesa (1) è quindi confermata. Il numero minimo N pari che sia somma di quattro primi è 2k, in questo caso 2 x 4 = **8 = 2 + 2 + 2+ 2**

Quindi $G(200, 4) = 1 \approx 200 / (\ln 200)^4 = 0{,}25$ valore approssimato per difetto rispetto al valore reale 1 (un solo quartetto di numeri primi tale che la loro somma sia N.

Al crescere di N, tale stima aumenta, ma dà sempre un valore approssimato per difetto dei quartetti di numeri primi con somma N.

N deve essere pari (come nella congettura forte di Goldbach con $N \geq 4 = a + b$ primi e $k = 2$).

Esempio più piccolo per $N = 32 > 8$ = numero minimo per $k = 4$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a & + & b & + & c & & d & = & N \\
\downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
1 & + & 7 & + & 9 & + & 15 & = & 32 \\
\mathbf{3} & + & \mathbf{5} & + & \mathbf{11} & + & \mathbf{13} & = & \mathbf{32} \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & &
\end{array}
$$

unico quartetto di numeri primi

Con somma $N = 32 = a + b + c + d =$ **3** + **5** + **11** + **13**

Con la (1), abbiamo

$$G(N, 4) \approx N / (\ln N)^4 \approx 32 / 144{,}27 = 0{,}22 < 1$$ valore reale.

Stessa procedura e stesse considerazioni per qualsiasi numero pari N $\geq$ k e per qualsiasi k, pari anche questo

Per N dispari e k dispari, c'è qualche problema (la somma finale non è mai N, ma differisce di due unità dalla somma successiva, per es. per N = 33 e k = 3:

a + b + c = N = 33

↓ ↓

1 + **15** + **17** = **33**   **3** + **13** + **19** = 35

5 + **11** + 21 = **37**

7 + 9 + **23** = **39**

↑

La stessa cosa si verifica per qualsiasi N dispari e per qualsiasi k dispari: ottenere una somma finale dispari e costante è un problema che sarà risolto in seguito, ma se qualche studioso nel frattempo lo risolvesse, è pregato di darcene comunicazione, pubblicheremo la sua soluzione sul nostro sito.

Un altro modo per ottenere terne di numeri primi (qualcuno anche ripetuto) è già riportato sul nostro sito

(Procedure per la formazione delle coppie di Goldbach e delle terne di Goldabch). Il metodo delle colonne a+b+c=N ci darebbe, una volta risolto il suddetto problema per N dispari, terne di numeri primi tutti diversi tra loro, senza alcuna ripetizione.

Si invitano i matematici volenterosi a risolvere questo problema.

Ma torniamo a k pari, La voce di Wikipedia riporta un risultato per il quale un numero pari può essere al massimo la somma di sei numeri primi:

"Il risultato più forte attualmente disponibile, dimostrato da Olivier Ramaré nel 1995, è che ogni numero pari *n* ≥ 4 si può scrivere come somma di al più 6 numeri primi".

Però non dice se questi sei numeri primi sono distinti oppure no (e quindi con ripetizioni). In questo secondo caso, per esempio:

16 = 2+2+2+2+2+2+2+2 = 8*2

24	=	3+3+3+3+3+3+3+3	=	8*3
40	=	5+5+5+5+5+5+5+5	=	8*5
56	=	7+7+7+7+7+7+7+7	=	8*7
88	=	11+11+11+11+11+11+11+11	=	8*11
104	=	13+13+13+13+13+13+13+13	=	8*13
…	…	… … … … …	…	…

Per i numeri pari di forma 8*p compresi tra questi numeri, si hanno varie combinazioni di numeri primi da 2 a 13; per esempio per 8*10 = 80 abbiamo

3+ 7+ 11+11+ 11 +11+13+13 = 80

Se invece la voce di Wikipedia si riferisce a numeri primi distinti, nulla proibisce ad un numero pari di essere la somma di 6 o di 8 o di qualsiasi numero di numeri primi distinti; per esempio prendiamo i primi 8 numeri primi dispari (col 2 si avrebbe ovviamente un numero finale dispari):

3+5+7+11+13+17+19+23 = 98 numero pari > 4.

Per il resto si rimanda alla voce di Wikipedia “Congettura di Goldbach” (Rif.2)

Conclusioni

Concludiamo questo lavoro con l’osservazione che se si parla di N come somma di k primi, bisogna distinguere i due casi in cui si parla di k primi distinti o di k primi con qualche ripetizione

Riferimenti

1) “Articoli su Goldbach”, in sezione “Articoli” del nostro sito www.gruppoeratostene.com

2) Wikipedia, “Congettura di Goldbach” par. “Risultati” dove si accenna a Numero pari come somma di c primi (in questo lavoro noi parliamo numero pari N come somma

di k primi, con N e k pari; ed N dispari come somma di k primi, con N e k dispari

Caltanissetta 1.9.2010