

1
2
3

4 Derive nello studio del periodo dei numeri razionali

5

Carmelo Di Stefano

6

7 **Riassunto** Ci sono diverse interessanti proprietà aritmetiche che spesso sfuggono
8 agli studenti e che invece possono essere trattati con un metodo di scoperta guidata,
9 con un CAS. In questo lavoro vedremo un'attività riguardante i numeri razionali.

10

11

12 **Abstract** There are a lot of interesting arithmetic properties, which are unknown
13 to the students. Using a CAS, it is easy discover, firstly, and find, successively, some
14 of these ones. In this article we present an activity about rational numbers.

15

16

17

1. I numeri razionali

18

19

20 Cominciamo con il dire che l'aritmetica del computer è fondata su un insieme fini-
21 to e limitato di numeri razionali. Anche se, specie con i CAS, di cui prenderemo ad
22 esempio ancora una volta Derive™, vi è la possibilità di ottenere parecchie cifre
23 decimali di numeri reali come e o π , o di ottenere risultati *esatti* con espressioni
irrazionali, come mostriamo nella fig. 1., ogni CAS lavora solo con numeri razionali.

24

```
#1: APPROX( $\pi$ , 100)
#2: 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494~
    4592307816406286208998628034825342117067

#3: SOLVE( $x^2 - 3 \cdot x - 1$ ,  $x$ , Real)
#4:  $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$  v  $x = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{3}{2}$ 
```

Fig. 1

1
2
3 La prima questione che tiriamo in ballo è cosa sono i numeri razionali e come si
4 ottengono. Un numero razionale può definirsi in vari modi, noi useremo una definizio-
5 ne per così dire *costruttiva*, dicendo numero razionale il risultato di una divisione fra
6 due numeri interi. Ovviamente la divisione deve essere *continuata*, se è il caso anche
7 all'infinito, se a un certo punto non si ottiene per resto 0. Ma allora vi sono solo 2
8 possibilità. O otteniamo resto 0, e quindi la divisione termina e il numero ottenuto ha
9 un numero finito di cifre non nulle, lo chiameremo decimale limitato, o non otteniamo
10 mai resto 0 e quindi otteniamo un numero decimale illimitato. In questo secondo caso
11 però, prima o poi dobbiamo riottenere un resto già ottenuto, dato che il resto deve
12 essere sempre minore del divisore, quindi otterremo un ripetersi all'infinito di un
13 gruppo di cifre. Abbiamo così i numeri periodici. Fra questi distinguiamo quei numeri
14 il cui periodo inizia *subito*, i periodici semplici, e gli altri, i periodici misti.

15 Cominciamo a chiederci quando otteniamo decimali limitati e quando periodici, e
16 in quest'ultimo caso, quando il periodo è semplice e quando misto.

17

18 2. Distinguiamo i numeri razionali

19

20 Effettuiamo una ricerca sul diverso tipo di numero razionale, sviluppando le fra-
21 zioni del tipo $1/n$, con n che varia da 1 a 30. per fare ciò usiamo il comando **TA-**
22 **BLE(espressione(x), x, val_iniz_val_fin,passo)**. Questo comando genera una
23 tabella a due colonne, nella prima vi sono i valori da sostituire, nella seconda i valori
24 sostituiti nell'espressione che da essi dipende. Vediamo i risultati nella fig.2, opportu-

1 namente sistemata per ragioni tipografiche.

2

#1:	TABLE	$\left(\frac{1}{n}, n, 1, 30 \right)$	15	0.066666666666	
			16	0.0625	
	[1	1	17	0.05882352941
		2	0.5	18	0.055555555555
		3	0.333333333333	19	0.05263157894
		4	0.25	20	0.05
		5	0.2	21	0.04761904761
		6	0.166666666666	22	0.0454545454545
		7	0.1428571428	23	0.04347826086
		8	0.125	24	0.041666666666
		9	0.111111111111	25	0.04
		10	0.1	26	0.03846153846
		11	0.090909090909	27	0.03703703703
		12	0.083333333333	28	0.03571428571
		13	0.07692307692	29	0.03448275862
		14	0.07142857142	30	0.033333333333

3

4

Fig. 2

5

6 Cominciamo a cercare di capire quando si ottengono numeri decimali limitati.

7 Quando il denominatore è 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25. non è difficile riconoscere che

8 tutti questi numeri hanno come unici fattori il 2 e il 5. e non è neanche difficile capire

9 allora perché vengono fuori numeri decimali limitati. Dato che far diventare un nume-

10 ro che ha per fattori solo 2 o 5, una potenza di 10 non ci vuole niente.

11 Quali sono invece i numeri periodici semplici? Qui abbiamo bisogno di

1 un'indagine più approfondita, dato che non per tutti i numeri mostrati, con 10 cifre
 2 decimali, si nota facilmente il periodo. Diciamo che sono certamente periodici sem-
 3 plici i numeri associati a 3, 7, 9, 11, 13, 21, 27; mentre sono certamente periodici
 4 misti quelli legati a 6, 12, 14, 15, 18, 22, 24, 26, 28, 30. non possiamo dire niente su
 5 quelli associati a 17, 19, 23 e 29. ciononostante pensiamo di potere sbilanciarci su
 6 una congettura. Infatti i periodici misti sono tutti pari, tranne 15, che però contiene il
 7 5 come fattore. Quindi crediamo di poter dire che se il divisore contiene fattori 2 o 5
 8 e qualche altro fattore diverso otteniamo numeri periodici misti. Se invece non con-
 9 tiene né 2 e né 5 abbiamo numeri periodici misti. Ovviamente parliamo di divisione
 10 fra numeri che non hanno fattori comuni, perché chiaramente $3/15 = 1/5$ e perciò
 11 avremo un numero decimale limitato.

12 Prima di attivare un'altra attività congetturale verificiamo che i numeri su cui non
 13 abbiamo potuto pronunciarci generano effettivamente numeri periodi semplici. Ora
 14 poiché certamente dividendo per 29 possiamo ottenere un massimo di 28 resti diver-
 15 si fra loro e da 0, portiamo il numero di cifre da visualizzare a 30 e generiamo di
 16 nuovo le quattro frazioni.

17

```
#3: PrecisionDigits := 30
#4: NotationDigits := 30
#5: TABLE( [ 1/n, n, [17, 19, 23, 29] ] )
#6: [ 17 0.0588235294117647058823529411764
      19 0.0526315789473684210526315789473
      23 0.0434782608695652173913043478260
      29 0.0344827586206896551724137931034 ]
```

18

1

Fig. 3

2

Effettivamente non è difficile vedere il periodo dei quattro numeri.

3

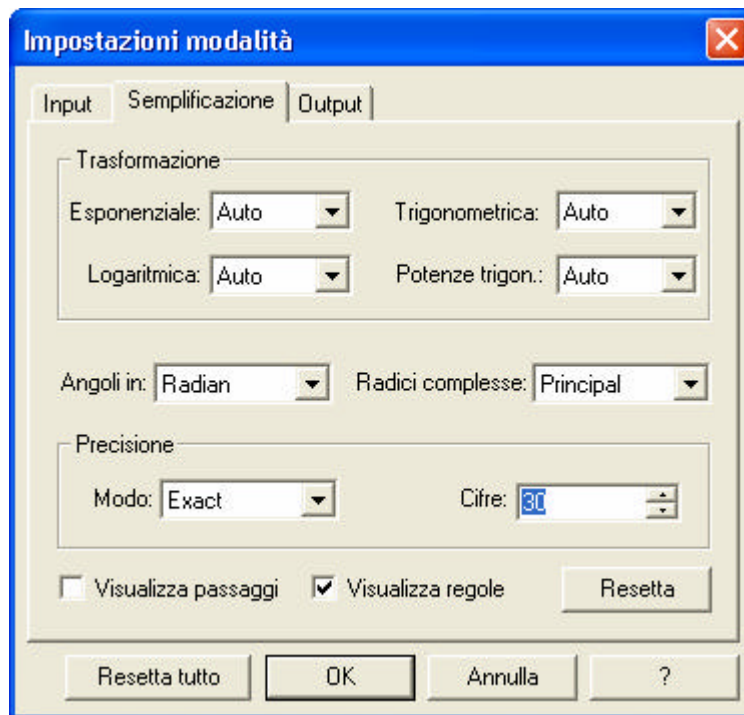
4

Osserviamo la presenza del comando **PrecisionDigits:=** che stabilisce la precisione del calcolo di Derive, mentre **NotationDigits** determina il numero di cifre mostrate. Si possono ottenere automaticamente scegliendo il percorso **Opzioni – Modalità ... - Semplificazione**, che attivano la finestra seguente, in cui inseriamo il valore voluto nel campo **Cifre**.

5

6

7



8

9

Fig. 4

10

11

12 3. Relazione fra il divisore e le cifre del periodo

13

1 Adesso vogliamo cercare di scoprire se e come il divisore è legato alle cifre del
2 periodo. Intanto cerchiamo di calcolare il numero delle cifre del periodo degli ultimi
3 quattro numeri, che sono abbastanza lunghi. Costruiamo una tabella che accanto al
4 divisore mette anche le cifre del periodo.

	3	1
	7	6
	9	1
	11	2
	13	6
#7:	17	16
	19	18
	21	6
	23	22
	27	3
	29	28

5

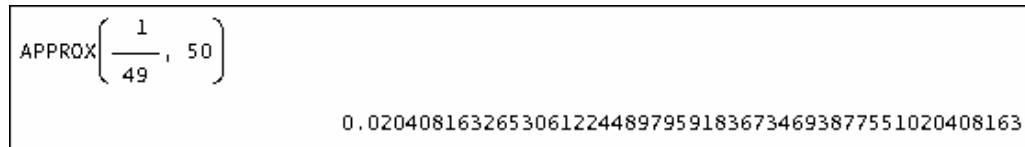
6

Fig. 5

7 Osserviamo che in alcuni casi il periodo è dato dal massimo possibile, ossia il di-
8 visore meno uno, che accade per 7, 17, 19, 23 e 29. Non è difficile capire che sono
9 numeri primi. L'idea che ciò accada per tutti i numeri primi, esclusi ovviamente 2 e 5,
10 viene subito archiviata, perché non succede per 3, 11 e 13. E certamente non succe-
11 de per nessuno degli altri numeri non primi, cioè 21 e 27. Vediamo se possiamo con-
12 fermare almeno quest'ultima idea.

1 visore non è un numero primo il numero delle cifre del suo periodo non è mai uno in
 2 meno del numero stesso. Verifichiamolo anche per 49.

3



4

5

Fig. 8

6 Non contiamo effettivamente le cifre, ma osserviamo che stiamo mostrando 50 ci-
 7 fre significative, ossia non contiamo gli zeri iniziali e il periodo 0204... comincia ben
 8 prima della 48a cifra.

9 Se invece il denominatore p è un numero primo diverso da 2 e 5, una regola plau-
 10 sibile è che il periodo sia un divisore di $(p - 1)$. Questa congettura è corretta, come
 11 può provarsi con tecniche *standard*. Il lettore interessato per questa questione e più
 12 in generale per tutte le altre che presentiamo può riferirsi per esempio al testo di Ore
 13 in bibliografia.

14

15 4. E i periodi misti?

16

17 Cosa possiamo dire dei periodi dei numeri periodici misti? Se i divisori sono otte-
 18 nuti moltiplicando solo per potenze di 2 o di 5, ovviamente esso non cambia, perché
 19 $1/2^n$ e $1/5^m$ sono numeri decimali limitati. Lo verifichiamo facilmente in fig. 9.

20

```
#13: PrecisionDigits := 6
#14: NotationDigits := 6
#15: VECTOR  $\left( \frac{1}{2 \cdot 3}, n, 1, 5 \right)$ 
#16: [0.166666, 0.0833333, 0.0416666, 0.0208333, 0.0104166]
#17: VECTOR  $\left( \frac{1}{5 \cdot 3}, n, 1, 5 \right)$ 
#18: [0.0666666, 0.0133333, 0.00266666, 0.000533333, 0.000106666]
```

1
2
3
4
5
6
7
8
9

Fig. 9

Stiamo considerando le frazioni $1/6$ e $1/15$, moltiplicandone il denominatore per potenze di 2 e di 5 rispettivamente. Vediamo che in effetti la *dimensione* del periodo non cambia, varia invece, ovviamente, quella dell'antiperiodo, che si ottiene moltiplicando per n quella di partenza.

Lo stesso non può dirsi se moltiplichiamo per potenze non di 2 o di 5, come si vede in fig. 10.

```
#19: PrecisionDigits := 10
#20: NotationDigits := 10
#21: VECTOR  $\left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6}, n, [7, 9, 11, 13] \right)$ 
#22: [0.02380952380, 0.01851851851, 0.01515151515, 0.01282051282]
```

10
11
12
13
14
15
16

Fig. 10

Abbiamo ottenuto numeri di antiperiodo 1, come $1/6$, e di periodo 6, come $1/7$, 3 non come $1/9$, 2 come $1/11$ e 6 come $1/13$. Quindi non riusciamo a trovare una semplice regola che ci permetta di determinare antiperiodo e periodo del prodotto conoscendo quelli dei singoli fattori.

Passiamo ad altre questioni.

1

2 **5. Un periodo ciclico**

3

4 Consideriamo un'altra interessante proprietà, che riguarda sempre i numeri perio-
5 dici semplici. Consideriamo la fig. 10.

6

```

#23: VECTOR( $\left(\frac{n}{7}, n, 1, 6\right)$ )
#24: [0.1428571428, 0.2857142857, 0.4285714285, 0.5714285714, 0.7142857142,
      0.8571428571]
#25: PrecisionDigits := 20
#26: NotationDigits := 20
#27: VECTOR( $\left(\frac{n}{17}, n, 1, 16\right)$ )
#28: [0.058823529411764705882, 0.11764705882352941176, 0.17647058823529411764,
      0.23529411764705882352, 0.29411764705882352941, 0.35294117647058823529,
      0.41176470588235294117, 0.47058823529411764705, 0.52941176470588235294,
      0.58823529411764705882, 0.64705882352941176470, 0.70588235294117647058,
      0.76470588235294117647, 0.82352941176470588235, 0.88235294117647058823,
      0.94117647058823529411]

```

7

8

Fig. 10

9

10 Osserviamo che le frazioni $n/7$, con n da 1 a 6, otteniamo non solo tutti numeri
11 periodici semplici di periodo 6, ma soprattutto numeri il cui periodo è una permuta-
12 zione ciclica di quello di $1/7$. Lo stesso notiamo anche in $n/17$. Possiamo perciò ipo-
13 tizzare che quando i/p , con p numero primo, ha periodo pari a $(p - 1)$, tutte le frazio-
ni n/p , con n numero naturale da 1 a $(p - 1)$, hanno un periodo formato da una per-

1 mutazione ciclica del periodo di $1/p$.

2 Cosa accadrà allora con le frazioni n/p , in cui p è primo ma per le quali $1/p$ non
 3 ha periodo $(p - 1)$? Vediamolo.

4

```
#29: PrecisionDigits := 10
#30: NotationDigits := 10
#31: VECTOR( $\left(\frac{n}{11}, n, 1, 10\right)$ )
#32: [0.09090909090, 0.1818181818, 0.2727272727, 0.3636363636, 0.4545454545,
      0.5454545454, 0.6363636363, 0.7272727272, 0.8181818181, 0.9090909090]
#33: VECTOR( $\left(\frac{n}{13}, n, 1, 12\right)$ )
#34: [0.07692307692, 0.1538461538, 0.2307692307, 0.3076923076, 0.3846153846,
      0.4615384615, 0.5384615384, 0.6153846153, 0.6923076923, 0.7692307692,
      0.8461538461, 0.9230769230]
```

5

6

Fig. 12

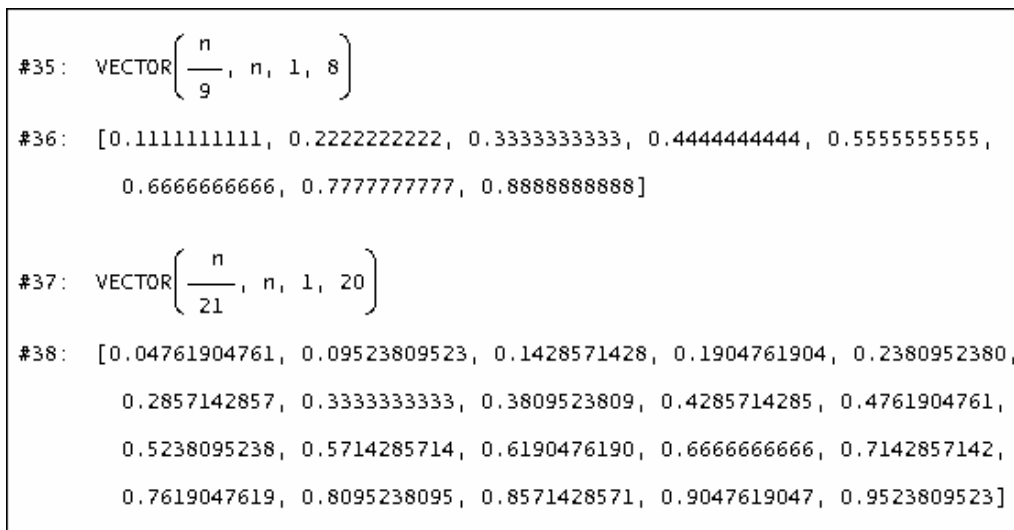
7

8 Nel caso di $n/11$ otteniamo 10 frazioni con 5 periodi diversi. Per $n/13$ invece 12
 9 frazioni con 2 periodi ciclici. Dato che nel primo caso il periodo è 2 e nel secondo 6,
 10 pensiamo di potere enunciare la seguente congettura.

11 Le frazioni n/p , con p numero primo, hanno periodo z che è un divisore di $(p - 1)$
 12 e questo periodo si divide in $z/(p-1)$ gruppi i cui periodi si ottengono permutandosi
 13 ciclicamente.

14 Concludiamo l'attività vedendo se ciò accade anche con frazioni di denominatore
 15 non primo, ma generanti sempre numeri periodici semplici.

1



2

3

Fig. 13

4

Per $n/9$ si hanno 8 numeri di periodo 1 tutti diversi; per $n/21$ si hanno 5 gruppi, tre di periodo 6 formati permutando ciclicamente 047619, 095238 e 142857. Poi, e qui vi è la stranezza, ve ne sono due di periodo 1. Ovviamente quando il denominatore non è un numero primo può capitare che il numeratore e il denominatore abbiano divisori in comune e perciò otteniamo periodi diversi. Per esempio $3/21=1/7$ e $7/21=1/3$.

9

10

Concludiamo questa proposta di attività, sperando di avere mostrato che un uso mirato delle nuove tecnologie permette di mettere in gioco la fantasia dello studente, ma anche di stimolarlo a cercare risultati che se vuole può anche provare a dimostrare in modo rigoroso.

14

15 Bibliografia

16

- 1 C. Di Stefano, *Derive A1– A2*, (per il biennio) Ghisetti & Corvi, Milano, 2005
2 C. Di Stefano, *Derive B1– B2*, (per il triennio) Ghisetti & Corvi, Milano, 2006
3 B. Kutzler, V. Kokol-Voljc, *Introduzione a Derive 6*, Media Direct, Basano del
4 Grappa, 2003
5 Ore O., *Number theory and its history*, Dover, New York, 1988

6

7

8 **Sitografia**

9

- 10 <http://Xoomer.virgilio.it/mathontheweb> (Sito dell'autore, in esso, fra l'altro, sono pre-
11 senti decine di files in Derive)

12

- 13 <http://www.derive-europe.com> (Sito ufficiale di Derive per utenti europei)

14

15

16

Carmelo Di Stefano