

**«Nella teoria dei numeri accade spesso che,  
a causa di qualche occasione felice ed inattesa,  
delle nuove novità molto eleganti si conseguono  
per induzione»**

**Carlo Federico Gauss.**

## **Dedicato a Goldbach**

**CAROLLA GUIDO<sup>1</sup>**

**Sunto.** In questo breve articolo si tratta la congettura di Goldbach (1742) con delle osservazioni e dimostrazioni<sup>2</sup>, facendo leva sulla numerosità dei pari esistenti tra due primi. In particolare, a conclusione, si riporta la dimostrazione per induzione relativa alla numerosità completa dei numeri pari con la formula sulla somma di due primi.

L'autore si rifà ad alcuni suoi precedenti articoli con l'obiettivo già raggiunto: "Infiniti numeri pari sono somma di due numeri primi non necessariamente distinti". Ripartendo da questo traguardo, egli trae le conclusioni che lo portano a considerare inserito necessariamente il numero 1 nell'elenco dei primi (cfr. [10], la *Premessa* e la nota 4) e quindi a dare soluzione al teorema: "Ogni numero pari è somma di due numeri primi non necessariamente distinti". Infine, nell'Appendice, egli spiega il perché la congettura di Goldbach rimanga tale da 267 anni.

**Parole chiave.** Numeri primi, congettura

*Premessa* - Si ribadisce brevemente e sostanzialmente quanto detto nella [10].

Nella "Teoria dei numeri", sulla primalità del numero 1 si possono riscontrare più posizioni: innanzi tutto, tenendo presente che un qualunque numero naturale ha infinite fattorizzazioni, lo si può moltiplicare quante volte si vuole per 1; in pratica, non considerando i fattori 1 nella fattorizzazione, è questa una delle ragioni per cui si preferisce affermare che 1 non è un numero primo, anche se soddisferebbe alla definizione: "è divisibile solo per se stesso e per 1". Invece i motivi per cui rendono 1 numero primo sono: a) perché non si può prescindere da detta definizione; b) perché 1 essendo fattore primo di se stesso lo divide esattamente, senza resto; c) perché è divisore di ogni numero, in particolare di un numero perfetto, che è uguale alla somma di tutti i suoi divisori escluso se stesso ( $6=1+2+3$ ,  $28=1+2+4+7+14$  (con  $4=2 \times 2$  e  $14=2 \times 7$ , 2 e 7 che sono al pari di 1, fattori primi), altri perfetti sono 496, 8128, etc.); d) perché nella distinzione basata sul numero dei fattori, i numeri interi positivi vengono ad essere divisi in tre classi: un solo fattore, il numero 1; due fattori (uno e se stesso), cioè i numeri primi; più di due fattori, i numeri composti.

L'opportunità di considerare primo il numero 1 o meno è criticabile: personalmente considero la questione della fattorizzazione infinita una cosa assurda perché si deve considerare 1 fattore primo una sola volta, non infinite volte. A conferma di ciò, con l'introduzione in matematica della nuova unità di

---

<sup>1</sup> Docente ordinario di Matematica e dirigente scolastico in ogni ordine di scuola, ora a r. ; e-mail: guidocarolla@libero.it

<sup>2</sup> Una perplessità dell'autore è che di dimostrazioni "elementari" se ne contano a centinaia e se ce ne fosse una elementare l'avrebbe trovata EULERO o qualcuno altro secoli fa, comunque si resta in attesa di giudizio di autorevoli studiosi.

misura infinita, numero degli elementi dell'insieme dei naturali  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ , indicato con il simbolo  $\mathbb{N}$  chiamato in inglese "grossOne", cioè unità grande, esso è un numero che si comporta con i numeri 0 e 1 come tutti gli altri numeri, in particolare  $\mathbb{N}^0 = 1$  e  $1^{\mathbb{N}} = 1$  [7]. Come è assurdo che per evitare l'annullamento della funzione di Eulero si debba escludere 1 dai primi, ma essa è lo stesso valida se si utilizzano i primi, facendo l'eccezione per il numero 1! Infatti, è  $\varphi(N) = N \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ , con  $p_1$  il

minore (escluso 1) e con  $p_s$  il maggiore dei fattori primi di  $N$ . Tra i tanti siti che ribadiscono il medesimo concetto relativo ad 1, il sito [www.spiega.it](http://www.spiega.it) riporta, tra l'altro:

Si definisce NUMERO PRIMO un Numero Intero che e' divisibile solamente per se stesso e per la unità.

Detto in altri termini un NUMERO PRIMO non ha divisori interi: per qualsiasi altro Numero Intero lo si divida, il risultato sarà un Numero Frazionario oppure la divisione avrà un resto. I primi 500 NUMERI PRIMI:

1 - 2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29 - 31 - 37 - 41 - 43 - 47 - 53 - ...

Inoltre, i due test di primalità [9] che seguono confermano che 1 è numero primo:

1)  $\frac{[(n-1)!+1]}{n} = k$  intero se  $n$  è primo, per  $n=1$  si ha  $k=2$ ; 2)  $\frac{2^n - 2}{n} = k$  intero solo se  $n$  è primo, per  $n=1$  si ha  $k=0$ , per cui segue la definizione di numero naturale  $N$  tutti i numeri interi maggiori o uguali a zero, dalla quale si evince che zero è un intero.

Infine credo che Pierre de Fermat, vissuto nel seicento, avesse ragione nel considerare 1 numero primo (v. nota 4).

Pertanto, nel presente articolo si riterrà 1 numero primo.

1. *Su un po' di storia e curiosità.*- La Congettura di Goldbach (fatta in una lettera di C. Goldbach ad Eulero nel 1742) dice "Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi non necessariamente distinti".

Ciò che rende la congettura così attraente non sembra, per ora, la prospettiva di un suo uso nelle soluzioni dei problemi del mondo reale, bensì la ricchezza, la bellezza e il suo mistero, la leggiadria matematica pura e semplice. Ancora oggi la congettura di Goldbach suscita domande e supposizioni. Naturalmente la dimostrazione mancante è un sogno per molti ricercatori e, per completezza di trattazione, si deve confessare che il ragionamento induttivo che segue altro non è che il prodotto d'osservazioni semplici, di sottile ricerca, ricco di fondamento logico-matematico.

Il problema, della congettura di Goldbach, un matematico tedesco conterraneo e quasi contemporaneo del filosofo Immanuel Kant, è di una semplicità disarmante: empiricamente è facilissimo riscontrare che  $4=2+2$ ,  $6=3+3$ ,  $14=3+11=7+7$  e così via. Ma nemmeno i più grandi geni della matematica sono mai riusciti a spiegare perché. Al punto che si è pensato potesse esservi una fenditura e che, con le grandi cifre e il rarefarsi dei numeri primi, vi fosse un'eccezione. Fra i pratici del calcolo si è così sfrenata una corsa per verificare cifre sempre più grandi, ma il rebus ha sempre mantenuto la sua inalterabilità. Ancora oggi non si è fatto alcun passo verso una rigorosa dimostrazione matematica, nemmeno i

computer più moderni e superpotenti, programmati con particolari algoritmi, sono riusciti a dimostrare la veridicità o meno della congettura che è stata verificata per tutti i numeri pari fino a 400 mila miliardi.

Una posta in giuoco addirittura di un milione di dollari sarebbe stata versata a chi avesse dimostrato la congettura di Goldbach: a versare la ragguardevole cifra entro il 2002, ma non riscossa da alcuno, sarebbe stata la casa editrice britannica “Faber and Faber” che nel 2000 lanciò il romanzo, tradotto in venti lingue, per l’Italia tradotto dall’inglese da Ettore Capriolo, editrice Tascabili-Bompiani, “Lo zio Petros e la congettura di Goldbach”, scritto dal regista greco-australiano Apostolos Doxiadis, ex docente di matematica, vincitore del festival cinematografico di Salonicco nel 1983 con un thriller di fantapolitica intitolato “Passaggio sotterraneo”.

Il libro di David Wells “PERSONAGGI E PARADOSSI DELLA MATEMATICA”, I edizione Oscar Saggi Mondadori, marzo 2002 e giunto nel 2006 alla ottava edizione, nelle pagine 267, 268 riporta il paragrafo in cui Hardy<sup>3</sup> parla della dimostrazione e di Ramanujan e tra l’altro recita: “Non è difficile avere delle intuizioni intelligenti; ci sono teoremi, come quello di “Goldbach”, che non sono mai stati provati e che chiunque potrebbe indovinare.”

Proprio questa frase ha dato la carica psicologica all’autore ad indagare su alcuni suoi precedenti articoli, dai quali scaturiscono le dimostrazioni che seguono.

### 2.1 - 1° Teorema.

“Se si esclude il primo 2, il numero dei “pari”  $n$  compresi tra due numeri primi qualunque  $p_h$  e  $p_k$  è

dato dalla semidifferenza tra gli stessi  $n = \frac{p_k - p_h}{2}$  “

Si dà la dimostrazione per via deduttiva, partendo dall’ipotesi che tra i numeri primi  $p_h$  e  $p_k$  vi possano essere alcuni numeri naturali pari indicati con  $m_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , infatti, si osserva che essi sono termini di una progressione aritmetica (di ragione  $r=2$ ), della quale i termini estremi, cioè il primo e l’ultimo sono:

$$m_1 = p_h + 1, \quad m_n = p_k - 1. \quad (2.2)$$

Essendo noto che in una progressione aritmetica di ragione  $r=2$ , il termine  $n$ .simo in funzione del primo termine è  $m_n = m_1 + (n-1) \cdot r$ , da questa si potrà ricavare  $n = (m_n - m_1)/2 + 1$ , nella quale sostituite le (2.2) si otterrà  $n = (p_k - 1 - (p_h + 1))/2 + 1 = (p_k - p_h - 2)/2 + 1 = (p_k - p_h)/2$  e tale risultato dimostra la (2.1).

2.2 - 2° Teorema. Dati due primi qualunque non necessariamente distinti, anche sostituendo gli stessi con altri due primi aventi la stessa somma, si può sempre maggiorare di 2 uno di essi per avere sempre

---

<sup>3</sup> Godfrey Harold Hardy ( 1887-1947 ), matematico inglese, collaboratore in analisi matematica e in teoria dei numeri di John Edensor Littlewood (1885-1977). Hardy dal 1914 ebbe il ruolo di mentore di Srinivasa Ramanujan (1887-1920), il genio indiano del XX secolo, ed entrambi divennero stretti collaboratori.

altri due primi.

Es.  $7+19=26=3+23 \Rightarrow (3+2)+23=5+23=28 \Rightarrow (5+2)+23=7+23=30$ . Si noti che l'aumento di 2 ad uno dei due primi 7 o 19 avrebbe dato due numeri dispari non primi 9 e 21, perciò  $7+19$  e' sostituita con la uguale somma di due primi  $3+23$ . L'enunciato del teorema, che sarà dimostrato avanti nel § 4, consentirà di ottenere tutti i numeri pari.

In definitiva ogni somma di due addendi primi  $p_i + p_j$  può essere sostituita all'occorrenza con

$p_i' + p_j'$ , che indica tutte le possibili somme uguali alla prima, per cui generalizzando le stesse con

$$p_h + p_k, \text{ si avranno } M(x) = p_h + p_k = 2(p_h + n) \text{ e quindi}$$

$$M(x+1) = M(x) + 2 = p_h + p_k + 2 = (p_h + 2) + p_k = p_h + (p_k + 2) = 2(p_h + n) + 2,$$

con quattro eventualità possibili, che sono:

$$M(x+1) = M(x) + 2 = p_h + p_k + 2 = (p_h + 2) + p_k = p_{h+1} + p_k \text{ prima soluzione}$$

$$= p_h + (p_k + 2) = p_h + p_{k+1} \text{ seconda soluz.}$$

$$= p_h' + p_k' + 2 = (p_h' + 2) + p_k' = p_{h+1}' + p_k' \text{ terza soluz.}$$

$$= p_h' + (p_k' + 2) = p_h' + p_{k+1}' \text{ quarta soluz..}$$

Ai fini di quanto enunciato nel 2° Teorema si adotteranno una o al più quattro soluzioni.

### 3 - Congettura di Goldbach.

“Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi non necessariamente distinti”.

Siano  $\forall h, k \in \mathbb{N}_0$  con  $h \leq k, n \in \mathbb{N}, p_h, p_k \in \{p : p \text{ numero primo}\}, M \in \{m : m \text{ numero pari } > 2\}$ .

Tesi:  $M = p_h + p_k$ .

Essendo per la (2.1)  $n = \frac{p_k - p_h}{2}$  il numero dei pari tra due primi qualunque  $p_h$  e  $p_k$ ,

si ha 
$$2n = p_k - p_h,$$

ora sommando ad ambo i membri  $2 p_h$  si ha  $2 p_h + 2n = p_k - p_h + 2 p_h,$

si raccoglie 2 a fattore comune  $2(p_h + n) = p_h + p_k$ , avendosi al primo membro un numero pari, perché il doppio della somma tra un numero primo ed un naturale compreso lo zero, si potrà scrivere

$$M = 2(p_h + n) = p_h + p_k, \tag{3.1}$$

ciò, considerata l'infinità dei primi dovuta ad Euclide (IV sec. a.C.), prova l'asserto parziale di

Goldbach (1742): “ Infiniti numeri pari sonno somma di due numeri primi non necessariamente distinti”.

#### 4 - Su tutti i numeri pari.

Finora, come detto, ci si e' limitati a dimostrare che esistono infiniti numeri pari che sono somma di due numeri primi, che e' cosa diversa dal dire “ogni numero pari  $>2$  e' somma di due numeri primi non necessariamente distinti”.

In aggiunta a quanto detto sopra, in riferimento alla dimostrazione del teorema di Goldbach, ci si può chiedere:

1)  $M = 2(p_h + n)$  può esprimere ogni numero pari  $>2$  ?

La risposta può scaturire da quanto segue:

Si deve rispondere alla domanda che per  $p_h \in \{p : p \text{ numero primo}\}$  ed  $n(p_h, p_k) \in N$  numero dei pari incluso lo zero, compresi tra  $p_h$  e  $p_k$ ,

$$M = 2(p_h + n) \text{ può dare tutti i numeri pari } >2 ?$$

Nel caso  $h = k$ , cioè per  $p_h = p_k$  la (3.1) diventa  $M = 2(p_h + 0) = 2 p_h$ , quindi sicuramente con

$M = 2(p_h + n)$  per  $n=0$  si hanno tutti i numeri pari  $> 2$  che si ottengono dal raddoppio di tutti i numeri primi.

A seguire, come detto sopra, si adotterà <sup>4</sup> numero primo, come già avviene da tempo in gran parte del mondo matematico, ad eccezione degli elenchi dei primi nei libri scolastici che iniziano da 2, con una evidente contraddizione nel riportare come primo numero scomposto in fattori primi 1 da 1. Inoltre, a seguire si può riscontrare, ad esempio fino al numero pari 100, che gli incrementi di 2 di  $p_h$  o di  $p_k$ , soddisfano sempre, anche oltre 100, la (4.5), alla quale si perverrà avanti:

$$1+1=2, \quad 2+2=1+3=4, \quad 3+3=6, \quad 3+5=8, \quad 3+7=10, \quad 5+7=12, \quad 7+7=3+11=14, \quad 3+13=16, \quad 5+13=18, \\ 7+13=1+19=20, \quad 3+19=22, \quad 5+19=24, \quad 7+19=3+23=26, \quad 5+23=28, \quad 7+23=11+19=30, \quad 13+19=1+31=32,$$

---

<sup>4</sup> Anche Pierre de Fermat, vissuto nel Seicento e denominato il “principe dei dilettanti” dallo storico E. T. Bell, tra l'altro il fondatore della “Teoria dei numeri”, sui numeri primi dice: “I numeri 1, 2, 3 sono primi, il numero 4 non è primo perché è il prodotto di 2 per 2 ( $2 \times 2=4$ ), il numero 5 è primo, il numero 6 non è primo perché...” ed ancora “I numeri primi più piccoli sono 1, 2, 3, 5, 7, 11, ...; nessuno di essi può essere diviso, dando come risultato un intero, da un numero diverso da 1 e da se stesso.” [8]. In realtà non sappiamo cosa avrebbe fatto Fermat se avesse conosciuto il teorema fondamentale dell'aritmetica (quello sull'unicità della fattorizzazione), che invece comparve per la prima volta nelle *Disquisitiones arithmeticae*, che Gauss pubblicò nel 1801.

Sullo stesso Fermat segue una nota storica, educativa. Egli svolgeva una vita tranquilla, stabile e priva di eventi esteriori, dedicandosi al suo lavoro onestamente e con dignità, e nel 1648, da magistrato, fu promosso a una funzione importante, consigliere del re al Parlamento provinciale di Tolosa, conservando questa posizione fino alla morte, avvenuta nel 1665. Molti storici non riescono a spiegarsi come Fermat, considerato il suo intenso lavoro per la corona, riuscisse a trovare il tempo e l'energia mentale per elaborare una matematica di primo ordine, scrivendone molti libri. Uno studioso francese ha avanzato l'ipotesi che l'incarico ufficiale di Fermat fosse, di fatto, vantaggioso per i suoi studi matematici, dato che i magistrati dei parlamenti, che erano anche le supreme corti di giustizia francesi, dovevano ridurre al minimo le loro relazioni non professionali, onde evitare le tentazioni dei donativi e di altre forme di corruzione; Fermat obbligato a ridurre la sua vita di società, studiava e ricercava in matematica che gli offriva quel diversivo di cui aveva tanto bisogno.

3+31=34, 5+31=36, 7+31=1+37=38, 3+37=40, 5+37=42, 7+37=1+43=44, 3+43=46, 5+43=48, 7+43=3+47=50, 5+47=52, 7+47=11+43=54, 13+43=3+53=56, 5+53=58, 7+53=1+59=60, 3+59=62, 5+59=64, 7+59=66, 7+61=1+67=68, 3+67=70, 5+67=72, 7+67=1+73=74, 3+73=76, 5+73=78, 7+73=1+79=80, 3+79=82, 5+79=84, 7+79=3+83=86, 5+83=88, 7+83=1+89=90, 3+89=92, 5+89=94, 7+89=17+79=96, 19+79=1+97=98, 3+97=100, ecc.

Per meglio far comprendere quanto detto sopra, si può osservare che, eccetto per  $4=2+2$ , i pari da 2 a 14 si ottengono sommando sempre 2 ad uno dei due addendi delle relative coppie di numeri primi, precisamente ad 1, 3, 5, per cui da  $1+1$  si ha  $1+3$ ,  $3+3$ ,  $3+5$ , poi dal primo addendo di  $3+7=10$  si hanno 5 e 7, quindi dal secondo addendo di  $3+11=14$  si ha 13 e così via.

Si noti che in casi analoghi a  $7+19=26$  si è passati a  $3+23=26$ , perché con l'incremento 2 di 7 o di 19 si sarebbero avuti due dispari 9 o 21 non primi, invece con l'incremento 2 di 3 si è avuto 5, per cui  $5+23=28$ .

Ecco perché avanti si dirà  $p_i + p_j = p'_i + p'_j$ . Posto  $x = (p_i + n_j) = (p'_i + n'_j)$ , con  $n_j$  e  $n'_j$  numero dei pari che vi sono rispettivamente tra  $p_i$  e  $p_j$  e tra  $p'_i$  e  $p'_j$ , si avrà:

$$M(x) = 2x = 2(p_i + n_j) = p_i + p_j = 2(p'_i + n'_j) = p'_i + p'_j.$$

Chiarito ciò, si riporta in riepilogo la dimostrazione per "induzione" dalla quale scaturisce "ogni numero pari  $>2$  è somma di due numeri primi non necessariamente distinti".

Si ripropone perciò la (3.1)  $M(x) = (2 p_h + n) = p_h + p_k$ ,

con  $h \leq k$ ,  $n(p_h, p_k) \in N$ , ovvero con  $n$  funzione di  $p_h$  e  $p_k$  appartenente ai numeri naturali compreso lo zero.

Il primo passo consiste nel dimostrare necessariamente che la formula è valida per il primo caso, cioè per  $x = 1$ , infatti  $M(1) = 2 \cdot 1 = 2(p_1 + 0) = 2(1 + 0) = 1 + 1 = 2$ , il secondo passo consequenziale, sufficiente ma non necessario ai fini della dimostrazione per induzione, è di provare la validità della formula per  $x=2$  e per  $x=3$ , così come segue:

$$M(2) = 2 \cdot 2 = 2(p_1 + 1) = p_1 + p_3 = 1 + 3 = 2(p_2 + 0) = p_2 + p_2 = 2 + 2 = 4 \text{ e}$$

$$M(3) = 2 \cdot 3 = 2(p_1 + 2) = p_1 + p_4 = 1 + 5 = 2(p_3 + 0) = p_3 + p_3 = 3 + 3 = 6.$$

Il passo successivo della dimostrazione per induzione consiste nel dimostrare necessariamente che se la formula è vera per un valore  $x$  qualsiasi, allora deve essere vera per  $(x + 1)$ .

Se  $M(x) = 2x = 2(p_h + n) = p_h + p_k = 2(p'_h + n'_j) = p'_h + p'_k$ , con  $p'_h + p'_k$ , somma/e scelta/e

di volta in volta oculatamente tra tutte le altre possibili somme di primi uguali a  $p_h + p_k$ , allora in generale si ha il corretto incremento di 2 con

$$M(x+1) = M(x) + 2 = 2(x+1) = 2(p_h + n) + 2 = (p_h + 2) + p_k = 2(p_{h+1} + n_k) = p_{h+1} + p_k, \quad (4.1)$$

con  $n_k = n(p_{h+1}, p_k)$ , numero dei pari tra  $p_{h+1}$  e  $p_k$  e se non è vera la (4.1), sarà vera la

$$M(x+1) = M(x) + 2 = 2(x+1) = 2(p_h + n) + 2 = p_h + (p_k + 2) = 2(p_h + n_{k+1}) = p_h + p_{k+1}, \quad (4.2)$$

con  $n_{k+1} = n(p_h, p_{k+1})$  e se non e' vera la (4.2), sar  vera la

$$M(x+1) = M(x) + 2 = 2(x+1) = 2(p_h + n) + 2 = (p_h + 2) + p_k = 2(p_{h+1} + n_k) = p_{h+1} + p_k, \quad (4.3)$$

con  $n_k = n(p_{h+1}, p_k)$  e se non e' vera la (4.3), sar  vera la (4.4)

$$M(x+1) = M(x) + 2 = 2(x+1) = 2(p_h + n) + 2 = p_h + (p_k + 2) = 2(p_h + n_{k+1}) = p_h + p_{k+1}, \quad (4.4)$$

con  $n_{k+1} = n(p_h, p_{k+1})$ .

La cosa fondamentale da notare e' che queste quattro equazioni possono essere vere anche tutte, in definitiva possono aversi da una a quattro soluzioni; le stesse sono tutte identiche all'equazione originale tranne per il fatto che  $x$  e' stato sostituito da  $(x+1)$ , con variazioni conseguenti di  $n$  alla quale si sono date altre connotazioni, ma che rappresentano sempre il numero dei pari tra i due primi di volta in volta interessati. Il passaggio da  $M(x)$  numero pari al successivo  $M(x+1)$  pari garantisce la possibilit  di ottenere tutti i numeri pari, senza soluzione di continuit .

La dimostrazione per induzione su tutti i numeri pari   cos  completata.

Pertanto, si riportano degli esempi per mostrare come sia agevole passare da un numero pari  $M(x)$  al successivo numero pari  $M(x+1)$ , proprio perch  possa essere compreso ogni numero pari:

ad es. nel passaggio da  $M(x)=18$  a  $M(x+1)=20$ , essendo  $18=2(5+4)=5+13$ , applicando la (4.1) si avr   $20=2(7+(4-1))=7+13$ ;

ad es. nel passaggio da  $M(x)=18$  a  $M(x+1)=20$ , essendo  $18=2(7+2)=7+11$ , applicando la (4.2) si avr   $20=2(7+(2+1))=7+13$ ;

ad es. nel passaggio da  $M(x)=68$  a  $M(x+1)=70$ , essendo  $68=7+61=31+37$ , non potendo aumentare di 2 uno dei quattro addendi in quanto si avrebbero i numeri composti 9,63,33,39, si dovr  ricorrere a  $68=2(1+33)=1+67$ , per cui aumentando di 2 l'addendo 1 si avr   $70=2(3+(33-1))=3+67$ , secondo quanto si pu  ottenere con la (4.3);

ad es. nel passaggio da  $M(x)=42$  a  $M(x+1)=44$ , essendo  $42=2(19+2)=19+23$  si prender   $42=2(13+8)=13+29$  ed applicando la (4.4) si avr   $44=2(13+(8+1))=13+31$ ;

a chiarimento del perch  possano esserci tutte e quattro le possibili soluzioni, si riporta il primo dei casi che si ha nei passaggi da  $M(x)=36$  a  $M(x+1)=38$ , infatti da  $M(x)=36=5+31$  si ha  $M(x+1)=38=7+31$  per la (4.1), da  $M(x)=36=7+29$  si ha  $M(x+1)=38=7+31$  per la (4.2), da  $M(x)=36=13+23=17+19$  si ha  $M(x+1)=38=19+19$  per la (4.3), da  $M(x)=36=13+23=7+29$  si ha  $M(x+1)=38=7+31$  per la (4.4).

Si noti che nel passaggio da  $M(x)$  a  $M(x+1)$  per i pari fino a 100 si   dovuto utilizzare necessariamente l'1 come numero primo: da  $2=1+1$  a  $4=1+3$ , con la (4.2); da  $38=1+37$  a  $40=3+37$ , con la (4.1); come detto sopra da  $68=1+67$  a  $70=3+67$ , con la (4.3) indirettamente e con la (4.1) in via diretta; da  $80=1+79$  a  $82=3+79$ , con la (4.1) direttamente, con la (4.3) indirettamente da  $80=7+73=13+67=19+61=37+43$  ed anche in  $90=1+89$  al fine di ottenere, attraverso  $92=3+89$  con la (4.1),  $94=5+89$  sempre con la (4.1).

In definitiva per ogni coppia di addendi primi  $p_i + p_j = p_i + p_j$ , generalizzando le stesse con

$p_h + p_k$ , si avr 

$$M(x+1) = M(x) + 2 = p_h + p_k + 2 = (p_h + 2) + p_k = 2(p_{h+1} + n_k) = p_h + (p_k + 2) = 2(p_h + n_{k+1}),$$

che è la (4.5), cioè :

“L’incremento di 2 di ogni numero pari  $M(x)$  che è uguale ad un numero pari  $M(x)+2=M(x+1)$  che si ottiene dalla somma di  $(p_h + 2) + p_k$ , oppure dalla somma di  $p_h + (p_k + 2)$ ”.

Ciò prova che con  $M(x) = 2(p_h + n_k)$  si possono avere tutti i numeri pari, ed ovviamente anche tutti i pari  $>2$ , come richiede la congettura di Goldbach.

Per concludere si riportano alcuni casi concreti della tesi sopra dimostrata:

$$4 = 2(1+1) = p_1 + p_3 = 1+3 = 2(2+0) = 2+2$$

$$6 = 2(1+2) = p_1 + p_4 = 1+5 = 2(3+0) = p_3 + p_3 = 3+3$$

$$8 = 2(1+3) = p_1 + p_5 = 1+7 = 2(3+1) = p_3 + p_4 = 3+5$$

$$10 = 2(3+2) = p_3 + p_5 = 3+7 = 2(5+0) = p_4 + p_4 = 5+5$$

$$12 = 2(1+5) = p_1 + p_6 = 1+11 = 2(5+1) = p_4 + p_5 = 5+7$$

$$14 = 2(1+6) = p_1 + p_7 = 1+13 = 2(3+4) = p_3 + p_6 = 3+11 = 2(7+0) = p_5 + p_5 = 7+7$$

.....

## APPENDICE

Qualora sorgessero dei dubbi sulla validità della formula dei primi  $p_k = p_h + 2n$ , che si ottiene da detta semidifferenza (2.1), che potrebbe far pensare sia una formula dei dispari, si precisa, ove ve ne fosse bisogno, che non si deve dimostrare il teorema, chiamiamolo così di “Goldbach dei numeri dispari”, cioè: “Ogni numero pari  $>2$  e’ somma di due numeri dispari non necessariamente distinti”, che equivale a  $M = dr + dt$ , avendosi

. 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 19, 21, ...

. d1, d2, d3, d4, d5, d6, ..., d10, d11, ...,

con  $n = (dt - dr)/2$  per ogni r e t appartenenti ai numeri naturali escluso lo zero, con  $r \leq t$ .

Dobbiamo invece dimostrare la congettura di Goldbach “Ogni numero pari  $>2$  e’ dato dalla somma di due numeri primi non necessariamente distinti” ed il fatto che si dica “... pari  $>2$ ...” fa supporre che secondo Goldbach i numeri primi comincino da 2 e non da 1 (come invece si deve ammettere, v. *Premessa* e la nota 4) o Goldbach forse non avrebbe incluso  $1+1=2$ , visto che dice  $\dots >2$ , per rendere indimostrabile il suo asserto con procedimenti elementari.

Se si confrontano le due successioni dei primi e dei dispari, si noterà che i pedici delle due successioni, tanto per intenderci, quelli che ho chiamato h e k, coincidono solo nei casi 1,6,7 con r e t.

Infatti, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, ...

. d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, d8, d9, d10, d11, d12, ...

. p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, ... p10, ...

Quindi un  $p_h$  e’ diverso da un  $p_h$  e non si può prendere n che sia “ il numero dei pari esistenti tra due dispari o tra un primo e un dispari o tra un dispari e un primo”, ma solo n, così come si è definito sopra “ numero dei pari esistenti tra due primi”, perché le due semidifferenze sono funzioni rispettivamente di dr, dt e di ph, pk:

$$n = (dt - dr)/2 \quad \text{e} \quad n = (pk - ph)/2,$$

che coincidono, come detto sopra, solo per i casi dei pedici 1, 6, 7..

Lecce, 09/07/2009

## BIBLIOGRAFIA

- [1]Carolla G., “Formula  $P_k = P_h + 2n$  dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)” in [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it), nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei “Numeri per tutti”, a seguito comunicazione in Congresso Nazionale della Mathesis di Vico Equense (NA), località Seiano – 3,4,5,6 Novembre 2003. Pubblicato anche su [www.desmatron.altervista.org/number\\_theory/goldbach.php](http://www.desmatron.altervista.org/number_theory/goldbach.php)
- [2]Carolla G., “Considerazioni su tre congetture matematiche (II parte)” pubblicato sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei “Numeri per tutti”. 2003.
- [3]Carolla G., “Considerazioni su alcune congetture matematiche” inviato per la pubblicazione sul Periodico di matematiche, Organo della Mathesis Società di Matematica e Fisica. Ottobre 2003.
- [4]Carolla G., “ I numeri primi di Fibonacci sono infiniti?”, pubblicato sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei “Numeri per tutti”. 2004.
- [5]Carolla G.-Maggiore F., “Dimostrazioni per deduzione e per induzione”, pubblicato sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Approfondimenti: idee interessanti. 2005.
- [6]Carolla G.- Una nota sull’articolo "Formula ... dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)", pubblicato sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei “Numeri per tutti”. 2006.
- [7]Sergeyev Ya.D. Misuriamo l’infinito: Un semplice modo per insegnare i concetti delle grandezze infinite, *Periodico di Matematiche*, vol. 6(2), 11-26.2006.
- [8]Amir D. Aczel.”L’enigma di Fermat”. Edizioni EST. 2000.
- [9]F. Di Noto – A. Tulumello. “Dimostrazione della congettura di Goldbach”, Metodo N. 20/2004. pubblicato sul sito [www.geocities.com](http://www.geocities.com) e “Proposta di dimostrazione del teorema di Goldbach” (aggiornata al 5.9.2009) sul sito [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com), sezione “Lavori Di Noto”.
- [10]Carolla G.- “Un tema che fa discutere: la primalità del numero 1”, pubblicato sui siti [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com) , [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) sezione “Approfondimenti” e [www.maecla.it](http://www.maecla.it) , sezione “Problemi, curiosità, ...”. 2009.