Proposta di Dimostrazione
Congettura di Cramer - Shank

Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello

Abstract
In this paper we propose a simple demonstration of Cramer - Shank, as demonstrated using in [4] on the conjecture Andrica proved true.

Sommario
In questo lavoro proponiamo una nostra semplice dimostrazione di Cramer – Shank, sfruttando quanto dimostrato in [4] sulla congettura di Andrica dimostrata vera.

Nella congettura di Cramer, R(p) è il *Cramer – Shank ratio*, che non deve essere maggiore di 1, affinchè la congettura di Cramer sia vera, in altri termini la congettura di Cramer è vera se:

$$R(p) = \frac{p_{n+1} - p_n}{(\ln p_n)^2} < 1$$

Il più grande valore di R(p) conosciuto è 0,92 per p_n = 1 693 182 318 746 370, con gap = 1132 tra questo numero e il successivo $p_{n+1} = p_n + 1132$.

Lemma
Se la congettura di Andrica è vera, allora è vera la congettura di Cramer.

Dim.
In [4] si è dimostrato che la congettura di Andrica è vera. Qui dimostriamo una conseguenza che influisce sulla congettura di Cramer.

Se la congettura di Andrica è vera allora è:

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

Da qui, se eleviamo al quadrato entrambi i membri e teniamo conto della regola

$$(a + b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

si ottiene:

$$(\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n})^2 < 1$$

Da qui è:

$$p_{n+1} + p_n - 2\sqrt{p_{n+1}}\sqrt{p_n} < 1$$

Riarrangiando la formula, sottraendo a entrambi i membri pn, e tenendo presente che per numeri primi, esclusi i numeri primi da 2 a 7, si ottiene che:

$$p_{n+1} - p_n + p_n - 2\sqrt{p_{n+1}}\sqrt{p_n} < 1 - p_n$$
$$p_{n+1} - p_n < 1 - 2p_n + 2\sqrt{p_{n+1}}\sqrt{p_n}$$
$$R(p) = \frac{p_{n+1} - p_n}{(\ln p_n)^2} < \frac{1 - 2p_n + 2\sqrt{p_{n+1}}\sqrt{p_n}}{(\ln p_n)^2} < 1$$

Poiché il termine

$$1 - 2p_n + 2\sqrt{p_{n+1}}\sqrt{p_n}$$

È equivalente a

$$1 - 2\sqrt{p_n}\sqrt{p_n} + 2\sqrt{p_{n+1}}\sqrt{p_n}$$

significa che esso è maggiore di 1 di una quantità che dipende dalla radice di p_{n+1} e che comunque tale termine rispetto al quadrato del logaritmo di p_n è circa di un ordine di grandezza minore, per cui il rapporto è effettivamente minore di 1; di conseguenza è:

$$R(p) = \frac{p_{n+1} - p_n}{(\ln p_n)^2} < 1$$

Algoritmo

Presentiamo un algoritmo per la ricerca di contro esempi circa la disuguaglianza trovata. Attualmente esclusi i numeri primi tra 2 e 11, l'algoritmo non trova contro esempi fino a 1 milione.

```
Dis(val1=1, val2=100) = local(p1=0,p2=0,a=0,b=0,c=0); {

  print("Ricerca controesempi disuguaglianza Cramer - vers. 1.00 MAR 2010\n");
  print("Numero di partenza:      ",val1);
  print("Numero di arrivo:        ",val2);

  p1=nextprime(val1+1);

  while(p1 < val2,

    p2=nextprime(p1+1);
    a = 1 - 2*(p1) + 2*sqrt(p1)*sqrt(p2);
    b = (log(p1))^2;
    c = a/b;

    print("**********************");
    print("Pn:                 ",p1);
    print("Pn+1:               ",p2);
    print("c:                  ",c);
    p1=p2;
    if(c>1,
      print("---> controesempio !!!");
      p1=val2;
    );
  );

}
```

Riferimenti

[1] “Soluzione unificata per alcune congetture sul numero dei numeri primi in un certo intervallo” Prof. Annarita Tulumello, in sezione “Articoli sui numeri primi” del nostro sito www.gruppoeratostene.com

[2]“The Landau’d prime numbers and the Legendre’s Conjecture” (La congettura di Landau e la congettura di Legendre) di Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello

[3] “Numeri primi in cerca d’autore” Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello

[4] Proposta di soluzione Congettura di Andrica - Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello