Connessione tra "piramide" di cubi e serie di Fibonacci
(con invito finale a giovani matematici volenterosi)

A cura della Prof. Annarita Tulumello del Gruppo Eratostene

Sul numero 1-2009 della rivista di didattica matematica "Progetto Alice" i Proff. Mario Barra, Alessandro Foschi e Luigi Rigogliosi, nel loro articolo "Maratona di Matematica-. Alcune riflessioni" chiamano "piramide" di cubi un triangolo numerico costituito dai numeri dispari consecutivi, disposti in modo che la somma dei numeri di ogni n-esima riga è l'n - esimo cubo:

1		1 = 1^3
3 5	3 + 5	= 8 = 2^3
7 9 11	7 + 9 + 11	= 27 = 3^3
13 15 17 19	13 +15 +17 + 19	= 64 = 4^3
… … … … … … …		… = n^3.

Una nostra dimostrazione è che, per esempio, scrivere 7 + 9 + 11 equivale a scrivere 9 + 9 + 9 = 27 = 3^2 x 3 = 3^3, e così anche per ogni n-esima riga.

Una connessione poco nota tra quadrati e cubi è la seguente, per 1, 2 e 3:

1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 +3)^2 = 36 (la somma dei primi cubi consecutivi è uguale al quadrato della somma dei primi n numeri naturali). Nel triangolo numerico, i quadrati dispari stanno sulla bisettrice centrale, mentre i quadrati pari sono la media aritmetica dei due numeri centrali (per es. 4 = (3 + 5) / 2, 16 = (15 + 17) / 2, ecc.

Ora abbiamo notato facilmente che, estendendo tale "piramide" / triangolo, che noi però chiameremo semplicemente triangolo, perché in effetti lo è (la piramide è solo una bella somiglianza ma soltanto apparente), che i primi numeri dispari di Fibonacci (in grassetto rosso) sono disposti sui lati laterali sinistro e destro:

1
3 ***5***
7 9 **11**
13 15 17 19
21 23 25 27 **29**
31 33 35 37 39 **41**
43 45 47 49 51 53 ***55***
57 59 61 63 65 67 69 **71**
73 75 77 79 81 83 85 87 ***89***
91 93 95 97 99 101 103 105 107 109
… … … … … … … … … … … … … …

e cosi via; con i numeri ***3***, ***13*** e ***21*** sul lato sinistro e ***5***, ***55*** e ***89*** (con ***1*** al vertice del triangolo) sul lato destro; mentre il numeri pari di Fibonacci , ***2***, è una media tra 1 e 3 sul lato sinistro, il numeri pari di Fibonacci ***8*** è la media tra 7 e 9 sottolineati, e il numero pari di Fibonacci ***34*** è la media di 33 e 35 sottolineati, comunque tutti vicini al lato sinistro, cioè all'inizio della somma di n numeri dispari, con n = 2, 3 e 6. Ma la regolarità finisce qui, poichè i successivi numeri di Fibonacci, ***144***, ***233***, ***377*** ecc si disperdono all'interno del triangolo. Ma già i primi nove numeri di Fibonacci ci bastano per proseguire il discorso sulle connessioni già accennate nel titolo; per esempio, ***144***, essendo un quadrato, si trova, come tutti gli altri quadrati sulla bisettrice centrale verticale: direttamente se sono quadrati dispari, come 1, 9, 25, 49, 81, o come media se se sono pari , vedi 4, 16, 36, 64, ecc tra loro alternati (un quadrato dispari e uno pari) Questa è una cosa che non è stata notata, oppure è stata trascurata dagli Autori dell'articolo citato all'inizio). Un'altra cosa non notata è che i **numeri primi** sul lato sinistro : **7**, **13**, **31**, **43**, **73** sono (almeno fino a 73) tutti di forma

6k +1, mentre i **numeri primi** sul lato destro: **5**, **11**, **29**, **41**, **71**, **89**, sono tutti di forma 6k -1, con eccezione del 19 e del 109 (entrambi di forma

6 x n +1), con k successivi = ***1***, ***2***, ***5***, 7, 12, 15 sul lato destro e ***1***, ***2***, ***5***, 7, 12, 15, 18 con ***1***, ***2***, ***5*** essi stessi numeri di Fibonacci, o ad essi molto vicini: 7 = ***8*** - 1, 12 =***13*** - 1, 15 = 13 + 2, 18 = ***21*** - 3.

Quindi tale triangolo numerico per i numeri dispari potrebbe essere eventualmente utile anche per studiare la distribuzione dei numeri primi di entrambe le forme, cosa che eventualmente vedremo in successivi lavori.

Ma vediamo ora l'alternativa: un triangolo numerico per i numeri pari, o tnp, e le sue connessioni ordinate (e quindi non casuali cosi come nel triangolo dei numeri dispari, i primi sette numeri dispari di Fibonacci

(***1***, ***3***, ***5***, ***13***, ***21***, ***55***, ***89*** si dispongono ordinatamente sui lati esterni, mentre i successivi si disperdono anche all'interno) .

2

4 6

8 10 12

14 16 18 20

22 24 26 28 30

32 ***34*** 36 38 40 42

44 46 48 50 52 54 56

58 60 62 64 66 68 70 72

74 76 78 80 82 84 86 88 90

92 94 96 98 100 102 104 106 108 110

112 114 116 118 120 122 124 126 128 130 132

134 136 138 140 142 ***144*** 146 148 150 152 154 156

158 160 162 164 166 168 170 172 174 178 180 182 184

… … … … … … … … … …

In questo triangolo, i numeri pari di Fibonacci ***2***, ***8*** sono sul lato sinistro, mentre ***34*** è sul lato accanto; e ***144*** già quasi sulla direttrice centrale (con i numeri di forma n^2+1, essendo un quadrato perfetto di un numero pari (12), e ***144*** + 1 = 145, media tra ***144*** e 146.

A proposito, ogni numero N dispari o pari si trova, nel rispettivo triangolo, nella n-esima riga, con n ≈ √N, e precisamente nella (n+1) – esima riga se la parte decimale di √N è compresa tra 0,5 e 1, e nella n-esima riga se la parte decimale è compresa tra 0 e 0,5; per es. nell'ultima e 13 riga del triangolo sopra, 158 è in tale riga poiché √158 =12,56, e cosi pure 160 con 12,64, 168 con 12,96; mentre da

170 (=169 +1 = 13^2 +1) si ha √170 =13,03 fino a √184 = 13,56; e tanto più vicina al centro quanto è più vicina ad un quadrato perfetto, essendo questo sempre al centro, per es. prossimi a 169 = 13^2.

Per quanto riguarda i numeri di Fibonacci, si nota che essi si addensano inizialmente nelle prime righe del triangolo numerico di tutti gli interi (cioè pari e dispari insieme), dove il lato destro è costituito dai numeri triangolari, connessi al Triangolo di Tartaglia (combinazioni di n elementi a due a due , n(n-1) /2

1
2 ***3***
4 ***5*** 6
7 ***8*** 9 10
11 12 ***13*** 14 15
16 17 18 19 20 ***21***
22 23 24 25 26 27 28
29 40 31 32 33 ***34*** 35 36
………………………………………………. ;

dopo di chè i numeri di Fibonacci si diradano sempre più; ma i primi otto sono concentrati nelle prime otto righe del triangolo dei numeri interi pari e dispari, disponendosi, almeno fino a ***34***, sui tre lati destri (1, 3 e 21 sul lato esterno, 2 e 5 sul secondo lato, 8 e 13 sul terzo lato, ecc.

I numeri di Fibonacci sono, tra l'altro, connessi al numero di petali o semi di alcuni piante:

Numeri di Fibonacci	piante		petali o semi
3	giglio		petali
5	ranuncolo		petali
21	cicoria		petali
34**,** ***55***	margherita		petali
21**,** ***34***	girasoli	spirali di fiori	in un senso e nell'altro
34**,** ***55***	girasoli	spirali di fiori	" "
55**,** ***89***	girasoli	spirali di fiori	" "
144	girasoli		semi

.

Conclusioni

Esiste quindi una relazione aritmetica non casuale tra i triangoli di numeri dispari, tnd, e i triangoli di numeri pari, tnp (da non confondere con il TNP, il Teorema dei Numeri Primi), con i numeri della serie di Fibonacci.

Approfondiremo in seguito eventuali relazioni anche con i numeri primi, di forma generale $6k\pm1$, tranne il 2 e il 3 iniziali, o con altre serie numeriche.

Ma invitiamo a farlo anche i giovani lettori volenterosi, e di comunicarci eventuali risultati raggiunti, non solo con i numeri primi, ma anche con altri tipi di numeri, a scelta degli autori. I migliori risultati saranno pubblicati successivamente sul nostro sito.

Prof. Annarita Tulumello

Parte seconda

Relazione tra piramide di cubi, partizioni di numeri e numeri di Fibonacci

Piramide mista pari e dispari
(in rosso le partizioni di numeri, in neretto sottolineato i numeri di Fibonacci, in rosso sottolineato i numeri che sono insieme partizioni di numeri e numeri di Fibonacci.

1

2 **3**

4 **5** 6

7 **8** 9 10

11 12 **13** 14 **15**

16 17 18 19 20 **21**

22 23 24 25 26 27 28

29 **30** 31 32 33 **34** 35 36

37 38 39 40 41 **42** 43 44 45

46 47 48 49 40 51 52 53 54 **55**

56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66

67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 **77** 78

……………………………………………… **89**…………….

Come si nota, le partizioni di numeri p(n) prediligono il primo lato sinistro (coi i numeri 1, 2, 7, 11, 22, e 56) e destro (con i numeri rimanenti 3 e 15) il secondo lato sinistro (numeri 5 e 30) , il secondo lato destro (numeri 2, 5 e 77), con solo il 42 isolato all'interno; mentre i numeri di Fibonacci prediligono il primo lato destro (con i numeri 1, 3 , 21 e 55) e il terzo lato destro (con i numeri 8, 13, 34 e 89), con il solo 2 isolato sul lato sinistro.

Si nota anche che i primi quattro numeri 1, 2, 3 e 5 (tranne il 4, sono insieme numeri di Fibonacci (sottolineati) e numeri di partizione (rossi), e che i primi numeri di partizione sono vicini ai numeri di Fibonacci:

Fib	p(n)	d	Fib
1	**1**		
2	**2**		
3	**3**		
5	**5**		
8	**7**	= **8** - **1**	
13	**11**	= **13** - **2**	
13	**15**	= **13** + **2**	
21	**22**	= **21** + **1**	
34	**30**	= **34** – 4	~ **3**
34	**42**	= **34** + **8**	
55	**56**	= **55** + **1**	
55	**77**	= **55** + 12	~ **13**
89	**77**	= **89** - 12	~ **13**
89	**101**	= **89** + 12	~ **13**
144	**135**	= **144** - 9	~ **8**
144	**176**	= **144** + 32	~ **34**
	176	= **233** - **89**	