Numeri Primi di Chen
Proporzioni in π(N) - Formule di previsione
Legami tra numeri di Fibonacci e ordine gruppi di Lie

Gruppo ERATOSTENE

Sommario
In questo lavoro vedremo quanti sono in percentuale approssimativa i numeri primi di Chen, tra tutti i numeri primi fino ad N; le proporzioni esaminate nel seguito si ritrovano anche nei numeri primi supersingolari, fattori degli ordini dei gruppi sporadici di Lie (in modo particolare il "mostro", con 15 numeri primi come fattori e tutti numeri primi di Chen).

Lo scopo dell'articolo è di individuare qualche elemento utile, per esempio, su un possibile collegamento tra i numeri di Chen e i gruppi sporadici di Lie, importanti in fisica (Modello Standard, teorie di stringa, cosmologia ecc.). Tanti fenomeni naturali sembrano infatti collegati ai numeri primi, e ci potrebbe essere qualche motivo per il quale la natura potrebbe o dovrebbe preferire numeri primi particolari, come per esempio i numeri primi di Chen, e tra questi, preferibilmente, quelli di forma 6k-1.

Definizioni
Se consideriamo due numeri primi p e p+2, allora p è un *numero primo di Chen* se p+2 è un numero primo oppure è un prodotto di due numeri primi (Vedi Wikipedia: "Chen prime" o "Numero primo di Chen").

Fissato un intero N, è possibile suddividere i π(N) numeri primi risultanti in *due categorie* di numeri primi: "*Categoria primi di Chen (CC)*" e "*Categoria numeri primi No Chen (NC)*".

La CC è partizionabile in due sotto-categorie di numeri primi: "C-" e "C+" tale che:

$$CC = C- \cup C+$$

$C_h = |CC|$ numero di elementi di CC
$C_{nh} = |NC|$ numero di elementi di NC

dove la *sotto-categoria "C-"* contiene tutti i primi di forma 6k-1; la *sotto-categoria "C+"* contiene i numeri primi di forma 6k+1.

Noi affermiamo che fino a π(N) è (fino a N $\approx$ 1 000):

$$C_h \geq 2/3\ \pi(N) \qquad \textbf{(1)}$$

$$C- \geq 2/3\ C_h \qquad \textbf{(2)}$$

$$C+ \leq 1/3\ C_h \qquad \textbf{(3)}$$

$$\lim_{inf}\ C-/C+ = 1 \qquad \textbf{(4)}$$

Dalla (2) è anche

$$C- \geq 4/9\ \pi(N) \qquad \textbf{(5)}$$

Due Metodi sull'individuazione della forma 6k±1 dei numeri primi di Chen "CC" o no Chen "NC".

Metodo della somma delle cifre

Si sommano le cifre del numero primo, se tale somma è di forma 3n-1 la forma del numero primo è 6k-1, se invece la somma e di forma 3n+1, la forma del numero primo è 6k + 1. La somma delle cifre conserva il segno - o + della forma 6k $\pm$ 1 del numero primo in esame.

Esempio numeri primi gemelli 59 e 61

5 + 9=14, 1+4 = 5 = 3 x 2-1 forma 6k-1;

6 + 1 = 7 = 3 x 2 + 1 forma 6k+1;

Metodo del modulo 6

Il numero primo p è di forma 6k-1 se (p + 1) modulo 6 = 0 (è intero).

Il numero primo p è di forma 6k+1 se (p - 1) modulo 6 = 0.

esempio per 59: (59+1) / 6 = 10 intero

esempio per 61: (61-1) / 6 = 10 intero

Algoritmicamente il metodo del modulo è più veloce; mentre mentalmente forse quello della somma delle cifre è più pratico.

Lemma dei numeri primi di Chen "C+"

Sia p ∈ C+ , con p numero primo di Chen allora p+2=3*p' con p' numero primo.

Dimostrazione

Se p ∈ C+ allora per definizione è di forma 6k+1; in tal caso il numero p+2=6k+1+2=6k+3 contiene i multipli del numero primo 3. Inoltre se p è un numero primo di Chen, allora p+2, oltre al fattore numero primo 3, ha solo un altro numero primo p', cioè p+2=6k+3=3*p'

Formazione dei numeri di Chen secondo le forme generali 6k$\pm$1 e proporzioni in π(N) al crescere di N

k	6k-1	6k+1=6k-1+2	6k+3
1	**5**	**7**	9=**3*3**
2	**11**	**13**	15=**3*5**
3	**17**	**19**	21=**3*7**
4	**23**	25=**5*5**	-
5	**29**	**31**	33=**3*11**
6	35=5*7	**37**	39=**3*13**
7	**41**	43	45=3*3*5
8	**47**	49=**7*7**	-
9	**53**	55=**5*11**	-
10	**59**	61	63=3*3*7
…	…	…	…

Tabella 1

In Tabella 1 è mostrato, per dieci valori di k, come si formano i numeri di Chen in blu secondo la definizione iniziale, ed in rosso sono segnati i numeri composti con 2 fattori primi, che determinano che il numero precedente è un numero primo di Chen. Si nota in tabella 1 che la colonna 6k+3 rispetta il Lemma precedente; ed inoltre dalla tabella 1 si deduce che per N=61 e π(61) = 18 è:

- 14 numeri di Chen (blu)
- 2 numeri “non di Chen” (43 e 61)
- $C_h \geq 2/3 * \pi(61) = 12$ come da (1)
- $C- \geq 2/3\ C_h = 8$ come da (2)
- $C-/C+ = 9/5 > 1$ come da (4)
- $C_h/C_{nh} = 12/6 = 2$

Andiamo ad esaminare adesso valori molto più grandi nella Tabella 2

n	10^n	π(10^n)	C_h	C_{nh}	C_h/C_{nh}
1	10	4	4	0	-
2	100	25	20	5	4
3	1000	168	115	53	2,16
4	10000	1229	819*	409*	2,0024*
5	100000	9592	6394*	3197*	2*
…	…	…	…	…	…

Tabella 2 - potenze di 10 fino a n = 5 , dei numeri di Chen e no Chen

* Valori stimati rispettivamente con le formule (1),(2),(4)

Dalla Tabella 2 notiamo facilmente che i numeri primi di Chen sono sempre più numerosi dei numeri primi C_{nh} non di Chen, con rapporto medio $C_h/C_{nh} > 2$. Questo perché i numeri primi di Chen sono mediamente in gran parte (circa 2/3) di forma 6k-1 e il resto (circa 1/3) di forma 6k+1, poiché per p = 6k +1, p+2 = 6k +3 ha spesso più di due fattori, e quindi p=6k+1 non può essere numero primo di Chen con la stessa maggiore frequenza di p = 6k-1 (vedi Tabella 1).

N	**C_h**	**C-**	**C+**	**C-/C+**
10	2	1	1	1
100	18	12	6	2
409	55	37	18	2,055
1000	110*	74**	37**	2**
1000	113*	80	33	2,42
10000	817*	544**	272*	2**
100000	6392*	4263**	2131**	2,0046**
…	…	…	…	…

Tabella 3 – numeri primi di Chen C-

* tranne i due primi numeri primi 2 e 3, non di forma 6k±1

** valori stimati come nella Tabella 2

In rosso valori reali

Dalla (6) si potrebbe anche intravedere un possibile coinvolgimento del numero aureo 1/***2,66*** = 1/Φ^2, cioè:

$$C- \geq 4/9\ \pi(N) \quad \textbf{(6)}$$

equivalente a:

$$C- > 1/\Phi^2\ \pi(N) \quad \textbf{(7)}$$

o anche a:

$$\lim_{inf} C- = 1/\Phi^2\ \pi(N) \quad \textbf{(8)}$$

Se si può coinvolgere il numero aureo è possibile anche coinvolgere i numeri di Fibonacci, presenti in molti fenomeni naturali e anche nella formazione degli ordini dei gruppi di Lie (vedi pagine successive).

Formule di previsione
Le formule precedenti consentono delle previsioni. Per fare un esempio, fino a N=409 ci sono Ch=57 numeri primi di Chen in tutto (compresi il 2 e il 3) , di cui:

C- $\approx$ 2/3 C_h = 2/3 x 55/3 = 36,66 $\approx$ 37 valore reale, di forma 6k-1;
C+ $\approx$ 1/3 C_h = 18,3 $\approx$ 18 valore reale di forma 6k+1,
C-/C+ = 36,66/18,3 = 2,003
37/18 = 2,055 valore reale

$\pi(409) = 80$
80 / 57 = 1,40
80/ 37 = 2,16
80 /18 = 4,44
C_{nh} = 31% $\pi(N)$

abbiamo:

C_{nh} = 80 x 0,31 = 24,8 $\approx$ 23 numeri primi non di Chen (vedi Tabella 1)
C- = 80 x 0,46 = 36,8 $\approx$ 37 numeri di Chen C- di forma 6k -1
C+ = 80 x 0,23 = 18,4 $\approx$ 18 numeri primi di Chen di forma 6k +1

Per cui:

78 numeri di Chen di forma 6k $\pm$1
2 numeri non di Chen
Totale 80 numeri primi fino a 409.

Percentualmente, sull'intero valore di $\pi(N)$, abbiamo fin qui (N = 1000) mediamente:

31% di numeri primi N' non di Chen;
46% di numeri primi C- di Chen di forma 6k-1
23% di numeri primi C+ di Chen di forma 6k+1 e quindi il 23 +46 = 69% di numeri primi C di Chen complessivi:

Per cui, per ogni $\pi(N \leq 1000)$, basta calcolare queste percentuali per avere valori stimati e approssimativi per ogni gruppo di numeri primi C_{nh} e C_h, e tra questi ultimi, il numero di quelli di forma 6k -1 e di quelli di forma 6k+1.

N=10^n	π(N)	% Chen	% no Chen
10	4	100%	0
100	25	80%	20%
409	80	71%	28,75%
1000	168	68,45%	31,54%
10000	1229	51,50%	48,49%
100000	9592	44,14%	55,85%
1000000	78498	38,15%	61,84%
11597517	89917	37,89%	62,10%
…	…	…	…

Tabella 4 percentuali reali dei numeri di Chen e no Chen fino a N=10^6
Comprensivo anche di N=409 e di 159517, ultimo e 34076° numero primo di Chen nella lista di OESIS b109611

Come si vede, la percentuale reale dei numeri di Chen rispetto a π(N) decresce anche ben al di sotto del 71%, mentre la percentuale dei numeri no Chen cresce oltre il 31% delle stime precedentemente indicate, sebbene con differenze sempre più piccole tra una percentuale e la successiva; e quindi anche le percentuali reali dei numeri C- e C+ e il loro rapporto, che sarà sempre maggiore di 2 per N ancora più grandi di 10^4=10 000.

Ulteriori ricerche più approfondite mostreranno grafici ed eventuali limiti, possibilmente anche legati in qualche modo al TNP (Teorema dei Numeri Primi), visto il coinvolgimento di π(N), e quindi possibilmente anche alla RH, l'ipotesi di Riemann.

In questo lavoro iniziale proponiamo soltanto una prima valutazione reale dei numeri primi di Chen e no Chen in π(N) per le prime tre potenze di 10, e anche per N = 409, per il quale si hanno valori reali e stime intermedie tra quelle di 100 e quelle di 1000, e valori reali (vedi Tabella 4) anche per N fino a 10^6 = 1 000 000 . (Da lista OESIS b109611).

Sorpasso dei numeri di Chen
Il sorpasso tra il numero di numeri primi di no Chen sul numero dei numeri primi di Chen avviene al numero N = 17159 dove il rapporto tra i due numeri è ≈ 2, per poi decrescere . Infatti 17159 è il 987° numero di Chen, e poiché π(17159) = 1975, 1975 : 987 = 2,0010131; tra i 1975 numeri primi fino a 17159, 987 sono numeri primi di Chen e 1975 – 987 = 988 numeri primi no Chen, con rapporto 988/987 = 1,0010131 (Vedi successiva Tabella 5).

Già fino al numero primo N precedente , 17077, ci sono 1968 numeri primi, di cui 986 di Chen e 982 numeri primi no Chen, con rapporto 1968/986 = 1,9959 < 2, e con rapporto 986/982 = 1,00440733 > 1,0010131.

Punto di sorpasso di C_{nh} su C_h è N = 17159. Dopo tale numero, i numeri primi no Chen saranno sempre di più dei numeri primi di Chen, e la loro somma è ovviamente sempre π(Chen) + π(no Chen) = π(N), quale che sia la percentuale dei primi e dei secondi.

Vediamo il "sorpasso"con una breve Tabella.

N	$\pi(N)$	C_h	$C_{nh} = \pi(N) - C_h$	C_h / C_{nh}	$C_h / \pi(N)$ %	$C_{nh} / \pi(N)$ %
…	…	…	…	…	…	…
17047	1966	985	981	1,004	50,10	49,89
17077	1968	986	982	1,004	50,10	49,89
17159	**1975**	**987**	**988**	**0,998**	**49,97**	**50,02**
17189	1978	988	990	0,997	49,94	50,05
17207	1981	989	992	0,996	49,92	50,07
17209	1982	990	992	0,997	49,97	50,05
17231	1983	991	992	0,998	49,97	50,02
…	…	…	…	…	…	…
999959	78494	29949	48545	0,616	38,15	61,84
…	…	…	…	…	…	…
1159517*	89998	34076	55922	0,609	37,86	62,13
…	…	…	…	…	…	…

Tabella 5

*ultimo numero N della lista OESIS b109611

Come si vede e come già accennato, il sorpasso avviene al numero N = 17159, e quindi da questo numero in poi i numeri primi no Chen saranno sempre più numerosi dei numeri primi di Chen, con conseguente rapporto C_h/C_{nh} tendente a 0 e percentuali di C_h (numeri di Chen) decrescenti e di C_{nh} (numeri no Chen) crescenti.

Preferenze tra i numeri primi - i gruppi di Lie

E' interessante come la natura abbia preferenze tra i numeri primi, di forma $6k \pm 1$, specialmente tra i numeri primi di Chen: tra questi preferisce quelli di forma C- come fattori dei gruppi di Lie (numeri supersingolari). Inoltre sceglie anche tra quelli di forma 6k (che comprendono i fattoriali n!), per quanto riguarda i gruppi di simmetria legate alle permutazioni di n elementi, e quindi n!, e combinando i fattoriali con i numeri di Fibonacci (e quindi 1,618 = Φ) con la nostra formula

$$L_m = k\,n! + k'\,F\underline{i} \qquad \textbf{(9)}$$

con L_m ordini dei gruppi di Lie, k e k' interi

Il metodo su cui è basata la (9) è quello di sottrarre all'ordine di un gruppo di Lie il fattoriale precedente, moltiplicato per una costante k, e dividere tale differenza per diversi numeri di Fibonacci, finché si ottiene un risultato intero k' in modo che sia valida la (9). Per un valore Lm la (9) può dare più soluzioni.

Per esempio il gruppo di Lie detto "Mostro" ha come fattori 15 numeri di Chen e loro potenze fino a 71, e togliendo il 2 e il 3 iniziali, rimangono 13 numeri di Chen di cui 9 di forma 6k-1 e 4 di forma 6k +1, con rapporto 9/4 = 2,25, come da proporzioni medie tra i due tipi di numeri primi di Chen.

Esempi di utilizzo della (9):

G2 = 14 = 6 + ***8*** = 3! + ***8*** = 1! + ***13***

F4 = 52 = 18 + ***34*** = 3 x 3! + ***34*** = 6 x 3! + 2 x ***8***

E7 = 133 = 120 + ***13*** = 5! + ***13*** = 5 x 4! + ***13***

E8 = 248 = 240 + ***8*** = 2 x 5! + ***8*** , e cosi via.

Legami tra numeri di Fibonacci e ordini di Lie
Altri esempi di legame tra Lie e Fibonacci sono:

78 = 3 x 4! + 2x ***3***

7920 = 5760 + 15 x ***144*** = 8! + 15 x ***144***

175560 = 46080 + 129480 = 64 x 6! + 9960 x ***13*** = 8! + 6440 x ***21***

Conclusioni
Le tre forme 6k-1, 6k+1 e 6k sembrano, per quanto sopra detto, preferite dalla natura come sorgente dei numeri (primi, con i soli fattori banali 1 e p; o, al contrario, N=6k, con molti fattori) per le sue necessità matematiche, forse anche perché tali forme hanno certe funzioni complementari con i valori più bassi (la funzione φ(n) di Eulero,) o più alti (funzione σ(n)) rispetto alle altre forme numeriche (trascurate): 6k+2, 6k +3 e 6k + 4, tra tutte le sei forme possibili che comprendono tutti i numeri naturali.

Riferimenti
1. "Numero primo di Chen" Wikipedia

2. "Chen prime" Wikipedia

3. "Sulle spalle dei giganti", paragrafi sulle funzioni, sul nostro sito www.gruppoeratostene.com e su alcuni siti della sezione Link.

4. Di Noto Francesco e Nardelli Michele, "DAI NUMERI PRIMI ALLE TEORIE DI STRINGA- Un ponte tra numeri e fisica tramite i numeri primi supersingolari" sul sito del Dott. Nardelli http://xoomer.alice.it/stringtheory e sul database Solar del CNR.

5. Lista OESIS b109611 sui numeri di Chen fino a N=1159917 = 34076° numero di Chen (ricordiamo che i numeri di no Chen fino a N sono la differenza tra π(N) e il totale dei numeri di Chen fino a N, e su questi valori (numeri di Chen e di no Chen) si calcolano le relative percentuali della Tabella 4)