Appunti sulla Congettura di Bateman

Rosario Turco, Maria Colonnese, Francesco Di Noto, Giovanni Di Maria, Michele Nardelli, Annarita Tulumello

18.03.2010

Sommario

In questo lavoro indaghiamo sulla congettura di Bateman (non la Nuova congettura di Mersenne) sulle somme di potenze di numeri primi.

Abstract

In this paper we investigate the conjecture of Bateman (Not New Mersenne's Conjecture) on sums of powers of primes.

Introduzione

Una *congettura di Bateman* si chiede, essendo:

1 + 2^1 + 2^2 +2^3 +2^4 = 1 + 5 + 5^2

se è questa l'unica somma di questa specie, usando numeri primi. Se i numeri composti sono permessi, c'è anche un'altra soluzione

1+2^1 +2^2 +2^3 +…2^12 = 1 + 90 +90^2 = 8191"

(Vedi [1] - libro di Wells, pag.16)

Per tale congettura, non interessa che la somma di potenze dia un primo, somma che chiameremo "*numero di Bateman*", ma che dati due numeri primi diversi, le loro somme di potenze diano lo stesso risultato. Nell'esempio citato sopra, nel primo caso 2 e 5; nel secondo caso 2 e 90, anche se 90 non è primo, ma il funzionamento matematico, come vedremo, è lo stesso in entrambi i casi.

Dall'esempio, notiamo che la forma 1+n+n^2, essendo la somma commutativa, si può riscrivere anche come:

$$n^2 + n + 1 = L(n) = 2T + 1$$

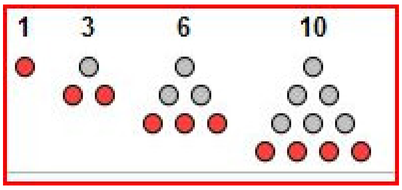
con T numero triangolare, nota come formula dei *numeri di Lie* alla base delle *simmetrie del Modello Standard tramite i gruppi di Lie eccezionali* (vedi [2] - **PGTS,** in sezione Articoli di Fisica matematica)**.**

I numeri Triangolari, com'è noto, corrispondono a coefficienti binomiali:

$$T = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} \quad (1)$$

da cui è:

$$2T + 1 = n^2 + n + 1 \qquad (2)$$



Un **numero triangolare** è un numero naturale, che visto come insieme di elementi è possibile disporli su una griglia regolare, in modo da formare un triangolo rettangolo isoscele o un triangolo equilatero, come nella figura.

Inoltre è da ricordare che esistono anche numeri *triangolari quadrati*, ovvero numeri che sono sia triangolari che quadrati come il 36. In particolare i numeri triangolari quadrati godono della proprietà che si ricavano da due numeri triangolari consecutivi:

$$T(n)^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

I numeri triangolari quadrati soddisfano *l'equazione di Pell* (vedi [6]).

La *congettura di Bateman* è vera se e solo se è:

$$B = \sum_{k=0}^{n} p_1^{\,k} = \sum_{k=0}^{m} p_2^{\,k} \qquad (3)$$

con p_1 e p_2 numeri primi e $p_1 \neq p_2$; B è detto *numero di Bateman*.

Se il numero di Bateman B è tale che (B-1)/2 è intero, quindi B è dispari, allora abbiamo a che fare certamente con un numero triangolare T = (B-1)/2.

Se sfruttiamo i numeri triangolari T significa che cerchiamo i casi per cui:

$$\mathrm{B} = 2T + 1 = \sum_{k=0}^{n} p_1^{\,k} = \sum_{k=0}^{m} p_2^{\,k}\,.$$

In tabella per la (3) esaminiamo il caso p_1=2, usando i numeri T:

2T+1	$\sum_{k=0}^{n} 2^k$	**Numero di Bateman**	$\sum_{k=0}^{m} p_2^{\,k}$	Rispetto congettura di Bateman
2*1+1	sum(k=0,1,**2**^k)	3	sum(k=0,2,**1**^k)	si
2***3** +1	sum(k=0,2,**2**^k)	7	sum(k=0,2,**2**^k)	no
2***15** +1	sum(k=0,4,**2**^k)	31	sum(k=0,2,**5**^k)	si
2***4095** +1	sum(k=0,12,**2**^k)	8191	sum(k=0,2,**90**^k)	no

Con p_1 = 2 si conoscono finora le coincidenze 31 e 8191 (vedi [1]), mentre ci sarebbero anche 3 e 7, individuati da noi in tabella con i numeri triangolari T=1,3,15. E' da precisare che rispetto alla (3), col numero di Bateman 7 le due sommatorie di potenze usano lo stesso numero primo, per cui il 7 non può essere considerato nell'ambito della congettura di Bateman; mentre nel caso del numero 1 esso si può ritenere primo, ma diciamo che è il caso banale della congettura di Bateman.

Se si allarga la trattazione anche a numeri composti allora T=4095 ci permette di individuare 90 come composto, ma per cui non è vera la congettura di Bateman, che è basata su uguaglianza di somme di potenze di primi.

Dalla tabella si osserva anche che, rispetto alla (3), se p1 < p2 allora m < n. Inoltre le uguaglianze delle due somme di potenze finora note avviene per valori di m ed n entrambi pari e con valori di T dispari.

Lo studio della (3) può essere fatto come studio di una equazione:

$$\sum_{k=1}^{n} p_1^{\,k} - \sum_{k=1}^{m} p_2^{\,k} = 0 \qquad (4)$$

su cui si potrebbe voler stabilire se esistono soluzioni per p_1 e p_2 numeri primi e per qualsiasi m ed n. In sostanza è una equazione con due incognite p_1 e p_2 e tali che MCD(p1,p2)=1; in sostanza delle equazioni diofantee non lineari di cui si cercano soluzioni intere ed in particolare numeri primi.

E' da notare innanzitutto che la (4) non può mai essere con m = n, perché altrimenti $p_1=p_2$; per cui deve essere $m \neq n$. Se $p_1<p_2$ allora è anche m < n.

In generale se si vuole tener conto anche del termine 1 la (4) è possibile scriverla anche come:

$$\sum_{k=0}^{n} p_1^{\,k} - \sum_{k=0}^{m} p_2^{\,k} = 0 \qquad (5)$$

I quesiti che ci si può porre su tale equazione (4) sono:

1. L'equazione (5) *ammette sempre soluzione*?
2. Le uguaglianze si ottengono solo in corrispondenza di numeri di Bateman 2T+1? In altri termini è dimostrabile che se esiste l'uguaglianza delle somme di potenze di primi, essa corrisponde solo a numeri triangolari T? E' lo stesso che chiedersi se l'uguaglianza della (3) è ammessa per B pari.

Ammissibilità delle soluzioni

Il quesito 1 è interessante. Ovviamente la (5) è equivalente alla (3). Un modo per vedere se la (3) ammette soluzione è il seguente:

"*L'equazione diofantea (5) ammette soluzione se e solo se la somma dei residui delle potenze delle due sommatorie ammette valori B mod r; in particolare è*:

$$r = \begin{cases} 4 \ \text{ se B mod 2 } \neq \ 0 \\ 3 \ \ se\ B \bmod 2 = 0 \end{cases}$$

"

Esempio

B = 31

B mod 4 = 31 mod 4 = 3 mod 4

Ora il Teorema di sopra se applicato alle due sommatorie è vero, per cui esiste la soluzione (Vedi appendice).

In ogni caso i numeri di Bateman B sono molto rari, se ne conoscono pochi finora.

B può essere pari?

Per rispondere al punto 2, facciamo le seguenti osservazioni.

Se B pari e $p_1 \neq 2$ allora la (3) comporta che m e n devono essere dispari con m<n con le due sommatorie uguali tra loro ed uguali a B (finora non s'è mai trovato un numero di Bateman per $p_1 \neq 2$).

Se $p_1=2$ abbiamo una eccezione: 2 è numero primo pari e le sue potenze possono essere sia con n finale pari o dispari, ma il valore finale della somma è sempre dispari grazie al termine 2^0. Quindi quando $p_1=2$ allora B deve essere dispari. Per B pari dobbiamo escludere il numero primo 2.

Il Teorema dell'ammissibilità delle soluzioni non aiuta a escludere che B non possa essere pari; anzi per B pari, m<n e dispari, x e y dispari, in teoria, sono ammesse soluzioni.

Se, invece, B è dispari allora è possibile avere a che fare con i numeri T = (B-1)/2 interi e la (3) con i numeri triangolari T è equivalente a:

$$2T = \sum_{k=1}^{n} p_1^{\ k} = \sum_{k=1}^{m} p_2^{\ k} \qquad (5)$$

In pratica la (5) deve dar luogo ad un numero pari 2T, ma per ottenere un numero pari da somme di potenze di numeri, in generale dispari e primi, ciò è ottenibile solo se m ed n sono pari. Questa è la situazione attualmente nota.

Radici quadrate di B per $p_1=2$

Esaminiamo le radici quadrate dei valori B finora noti basato sulla somma di potenze del 2:

√**3** = **1**,73 …

√**7** = **2**,64 …

√**31** = **5**,56…

√**8191** = **90**,504…

I valori B di sopra sono associati alle forme triangolari cioè B=2T+1=n^2+n+1. Premesso che le forme n^2+n+1 sono a metà strada tra n^2 ed (n+1)^2, essendo la nota differenza tra i due quadrati (n+1)^2 – n^2 = 2n+1, se a 2n+1 togliamo n rimane n+1. Chiamiamo con *d* la parte decimale della radice quadrata di B. La parte intera della radice quadrata corrisponde tra l'altro col numero primo (vedi tabella precedente).

T	**B =2T+1=n^2+n+1**	**√B**	$\sum_{k=0}^{n} 2^k$	**Numero primo (si/no)**
1	3	1,73	3	Sì
3	7	2,64	7	Coincid. Banale
6	13	3,60	15	No 15>13
10	21	4,58	***31***	No ***31 < 21***
15	**31**	5,56	**31**	Si
…	**…**	…	**…**	No
4095	**8191**	90,504	**8191**	Si

Come si nota facilmente, la parte decimale d di √B tende a 0,50 al crescere di B poiché B=2T+1 è a metà tra due quadrati successivi n^2 ed (n+1)^2, con n parte intera.

Esempio
90^2 = 8100, 91^2 = 8281, e 8191= 8100 + 90 +1 = 8281 – 90.

Poiché la parte decimale della radice quadrata è proporzionale alla distanza di N dal quadrato precedente (vedi [5]), si desume che la radice quadrata di n^2 +n sia pure 0,50…

Affinché il numero $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ coincida con 2T+1, anche tale sommatoria deve avere la parte decimale tale che d ~ 0,50… nella sua radice quadrata, ma per i numeri 2T+1 più piccoli, essa tende a 0,50… (vedi radici di 3,7,31 e 8191).

Per sommatorie più grandi, d tende a 0,50 se le sommatorie coincidono con 2T+1. In tutti gli altri casi in cui d è diversa da 0,50, la coincidenza non si verifica o ci va molto vicino, per es. per 2^57 - 1, ha d ~ 0,49...

Anche l'analisi tramite la radice quadrata tende a mostrare che i numeri di Bateman B sono piuttosto rari.

Forme numeriche dei numeri di Bateman noti
Circa la forma numerica dei numeri primi di Bateman, in questo caso (b=2) possiamo però dire che sono tutti (tranne il 3 iniziale) di forma 6k+1, poichè le potenze dispari di 2 sono di forma 6k+2, ed essendo le sommatorie di forma 2^n -1, abbiamo

2^n -1 = (6k +2) -1 = 6k + 2 -1 = 6k +1

Infatti 7 = 6*1 +1, 31 = 6*5+1, 8191 = 6*1365 +1.

(Con le potenze pari m di 2 , abbiamo invece, con eccezione d 2^2 =4), che 2^m -1 divisibile per 3, e quindi non possono dare mai numeri primi: Per es. 16-1 = 15= 3*5; 64-1 = 63 = 3*21, ecc, con 1, 5 e 21 numeri di Collatz (vedi [3]).

Trascodifica binaria dei numeri di Bateman
I numeri di Bateman finora noti sono numeri la cui parte binaria è costituita da soli 1; ma ciò è una prerogativa delle somme delle potenze di 2:

```
? binary(3)
%27 = [1, 1]
? binary(7)
%28 = [1, 1, 1]
? binary(31)
%30 = [1, 1, 1, 1, 1]
? binary(8191)
%31 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

Algoritmi di ricerca delle soluzioni
Un algoritmo di ricerca veloce può basarsi sul fatto di dare per buono che i numeri di Bateman possano trovarsi grazie a numeri triangolari e con potenze m ed n pari con m<n. Sebbene questa sia una accelerazione, purtroppo non risolve il problema di dover scandire per ogni T o B=2T+1 e per ogni numero primo p_1, per diverse potenze di $p_{1,}$ la cui somma di potenza sia uguale a B e poi cercare un secondo numero p_2.

APPENDICE

Per l'esempio A, dobbiamo considerare ogni termine della sommatoria.

La (3) nel caso B=31 è:
1 + x + x^2 +x^3 + x^4 = 31 = 1 + y + y^2

Per 1:
1 mod 4 = 1

Per x e per y:
0 mod 4 = 0
1 mod 4 = 1
2 mod 4 = 2
3 mod 4 = 3
4 mod 4 = 0

Per x^2 e per y^2:
0^2 mod 4 = 0
1^2 mod 4 = 1
2^2 mod 4 = 0
3^2 mod 4 = 1

Per x^3
0^3 mod 4 = 0
1^3 mod 4 = 1
2^3 mod 4 = 0

Per x^4
0^4 mod 4 = 0
1^4 mod 4 = 1
2^4 mod 4 = 0

Se si considera la somma, con tutte le possibili combinazioni di valori di sopra, dei termini 1, x, x^2,x^3,x^4 esiste il valore 3 mod 4; analogamente per la somma, con tutte le possibili combinazioni di valori di sopra, dei termini 1, y, y^2, esiste il valore 3 mod 4.

Riferimenti

1. David Wells, PRIME NUMBERS. The Most Mysterious Figures in Math", pag. 16

2. Francesco Di Noto e Michele Nardelli"Progetto PGTS", in sezione "Articoli di Fisica Matematica sul nostro sito www.gruppoeratostene.com

3. Gruppo Eratostene, "Dimostrazione della Congettura di Collatz" in sezione "Articoli su Collatz", idem

4. "Bateman Conjecture Exploration in Grid Computing" di Miguel Cardenas – Montes et alt.

5. Rosario Turco, Maria Colonnese,Michele Nardelli, Giovanni di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello, "Proposta di dimostrazione della congettura di Andrica" sezione "Articoli sulla teoria dei Numeri, idem

6. http://it.wikipedia.org/wiki/Numero_quadrato_triangolare