BREVE COMMENTO A "Due o tre curiosità sui numeri primi"

di Guido Carolla[1]

Premessa

Il commento sull'argomento di cui al titolo avrà prevalentemente in oggetto la qualità del numero 1. Alla presente esposizione abbiamo dato un'impostazione sequenziale così come sono riportati gli argomenti dell'articolo sul link http://utenti.quipo.it/base5/numeri/curiosprimi.htm. .
Pertanto, ritenendola importante, abbiamo evidenziato la discussione sulla primalità del numero 1, rifacendoci alle idee di Pitagora, Speusippo, Filolao, Euclide, Eratostene, Fermat, Gauss, dell'illuminismo e finalmente dei nostri giorni nei quali si dovrebbero in certo senso raccogliere i frutti dell'evoluzione della Matematica.
Comunque, sulla primalità di 1, siamo consapevoli di non volere imporre la nostra opinione, visto trattarsi di una questione sempre aperta ed ancora non del tutto risolta.

Commento prima parte

Il link di cui sopra, del sito Web realizzato da Gianfranco Bo, riporta l'argomento col titolo del presente commento che si conclude con la domanda "Perché 1 non è primo?", la cui risposta, è tratta da [2].
Innanzi tutto la definizione di numero primo, proposta nel sito: "Un intero positivo n si dice primo se ha esattamente due divisori positivi" è strutturata, così proprio allo scopo di escludere il numero 1, che assurdamente, al 2009, si dovrebbe considerarlo ancora "non classificato", perché si giunga di conseguenza a detta conclusione, come vedremo anche avanti.
In secondo luogo, l'affermazione "Per questo motivo, gli interi $n=2$ che non sono numeri primi si dicono composti": si vuol dire certamente $n \geq 2$!
Il Teorema fondamentale dell'aritmetica, come sappiamo, dice: "Ogni numero naturale maggiore di 1 o è un numero primo o si può esprimere come prodotto di numeri primi. Tale rappresentazione è unica, se si prescinde dall'ordine in cui compaiono i fattori": a nostro avviso non si nega esplicitamente la primalità di 1.
L'altra osservazione da fare al breve articolo del quale stiamo analizzando il contenuto è sul punto che dice "E ora che ci siamo chiariti le idee, vi propongo alcune curiosità sui numeri primi. Buona lettura!": non appare evidente, invece, un po' di confusione di idee?
Sul 2 è chiaro che Donald Knuth, professore emerito nell'arte della programmazione, pur noto per il suo umorismo informatico, non ha potuto dire "Tutti i primi sono dispari tranne 2, che è il più "strano" o "dispari" di tutti": come si ha da una pseudo-traduzione. Egli ha solo detto: "All primes are odd except 2, which is the oddest off all".
Sul 19 è riportato "Se capovolgete il 19, ottenete 61 che è ancora un numero primo. 19 è il più piccolo numero primo che ha questa proprietà.": perché 11 non ce l'ha?
Per il resto della prima parte non entriamo nel merito, trattandosi di altre pur semplici e simpatiche curiosità.

.

[1] Già docente ordinario di Matematica e dirigente scolastico in ogni ordine di scuola, ora a r.. E-mail guidocarolla@libero.it

Alcune opportune riflessioni dell'antichità

Rifacendoci a Pitagora (c. 570-500 a.C.) ed a Filolao (c. 470-390 a.C.), ritenuto un pitagorico della seconda generazione, sottolineiamo la indiscutibile qualità di 1, 2, 3, 4, numeri che secondo Filolao erano fondamento della progressione che rappresentava 1 il punto, 2 la linea, 3 la superficie, 4 il solido.
In seguito Speusippo (c. 393-330 a.C.), nipote di Platone (427-347 a.C.) e suo successore come caposcuola nell'Accademia di Atene spiegò, secondo lui, cosa intendesse Filolao: "Il punto è il primo principio, che conduce alla magnitudine, la linea il secondo, la superficie il terzo, il solido il quarto".
Inoltre bisogna considerare che qualche secolo addietro, i massoni, illuministi e rivoluzionari intellettuali associavano Pitagora ai numeri primi, anche se nell'antichità non c'era stato alcun suggerimento di questa connessione. Grande importanza si attribuiva a quelli che erano ritenuti i numeri primi centrali nel misticismo pitagorico, cioè 1, 3, 5 e 7, fra i quali evidenziamo che vi è 1.

Commento seconda parte

Ora veniamo al commento critico del paragrafo "Perché 1 non è primo".

Nella piccola nota storica sulla definizione di Euclide, vissuto intorno al 300 a. C., sui numeri primi ci domandiamo: è possibile che si debba ancora oggi non considerare 1 un numero? Perciò la riportata definizione di numero primo di Euclide: "Numero primo è quello che è misurato (=diviso) soltanto dall'unità" va aggiornata, non solo al 1801, anno in cui Gauss (1777-1855) nelle *Disquisitiones arithmeticae* pubblicò il Teorema fondamentale dell'aritmetica, ma ad oggi in cui non si può negare che 1 sia un numero e non tale non essendo una "pluralità composta di unità", come riteneva Euclide. Quindi se Gauss si è rifatto ad Euclide per formulare il teorema sull'unicità della fattorizzazione, intanto non aveva sicuramente affermato esplicitamente che 1 non potesse considerarsi numero primo, ma non sappiamo cosa avrebbe detto o fatto Fermat (1601-1665) che considerava primo il numero 1.

Pertanto non si tratta solo di una piccola nota storica, ma ben altro di più opinabile, per cui rimandiamo all'articolo [3], nel quale sono spiegate varie ragioni in proposito. Con ciò nessun appunto si vuole sollevare all'autrice della nota, Ivana Niccolai, alla quale va il merito per aver riportata l'importante questione. Nel prosieguo di detto paragrafo peraltro appare evidente che non si può ritornare al medioevo "in cui né 1 né 2 erano considerati numeri primi. Anzi, l'unità non era neppure un numero, ma qualcosa di più!", né si può sostenere ad oggi la voce di Sant'Isidoro da Siviglia il quale "In pratica dice che i numeri dispari si dividono in tre categorie: i semplici (primi), i composti e i "mediocres". Quindi il 2, essendo pari, non può essere un numero primo".
Il paragrafo procede riportando qualcosa che fu detto all'epoca, ma che non può essere valida oggi e cioè che 1 non può considerarsi numero primo, sol perché "L'uno è il seme di tutti i numeri, non è un numero".
Di Gerard Encausse, conosciuto col nome di Papus, sul numero 1 (meno male che lo si chiami numero…) possiamo accettare ovviamente che il suo quadrato, il suo cubo, la sua radice sono se stesso, il suo nome è l'unità e che è l'origine di tutti i numeri, pur comprendendo per il resto le motivazioni del tempo.

Infine, ci permettiamo di entrare in una analisi dettagliata, condividendo qualcosa con i due autori chiamati in causa nel paragrafo "Perche` 1 non è primo?", ma evidenziamo alcune perplessità sulle seguenti affermazioni:

“Vogliamo qui spiegare perché si suole escludere 1 dall’insieme dei numeri primi…”: pur rispettando la loro opinione diciamo ancora che la questione sulla primalità di 1 è tuttora sempre aperta.
Essi proseguendo affermano “il numero 1 non viene considerato primo per vari motivi…”: non sarebbe il caso di dire invece che il numero uno potrebbe non essere considerato numero primo per vari motivi …

Sul punto 1, “Il numero 1 ha un solo divisore, mentre tutti i numeri primi ne hanno due.”: c’è da obiettare quanto già detto sopra in riferimento ad Euclide, vissuto circa 2300 anni fa, ed a Gauss che si è rifatto a questi, oltre 200 anni or sono. Ancor prima di Gauss, nel 1742, Goldbach formulò la sua congettura “Ogni numero pari >2 è dato dalla somma di due numeri primi non necessariamente distinti”; il fatto che egli dica “… pari >2…” fa supporre che secondo Goldbach i numeri primi comincino da 2 e non da 1, oppure che Goldbach forse non avrebbe incluso 1+1=2, visto che dice …>2, per rendere indimostrabile il suo asserto con procedimenti elementari, di cui uno di essi, con l’utilizzo di 1 primo, lo abbiamo esposto in [4].
Per la funzione Φ di Eulero si può essere concordi nel considerare una seconda formula valida per i primi ≥ 2, proprio come proponiamo in [3]. E ciò è tutto da approfondire.
Sul punto 2, “Molti teoremi, per es. il Teorema fondamentale dell’aritmetica, dovrebbero essere enunciati in un modo molto più complicato per tenere conto delle proprietà speciali di 1”: non vi sarebbe alcuna complicazione, se per la fattorizzazione di 1 si accettasse che $1^{①} = 1$, come spiegato avanti e detto in [3].
Sul punto 3, “Nel Crivello di Eratostene, se il numero 1 fosse considerato primo si cancellerebbero tutti i numeri tranne lo stesso 1 al primo passo.”: nel Crivello di Eratostene si considera il numero 1 non primo? Dov’è scritto? Non risulta che Eratostene (276-194 a C.) avesse smentito Euclide, perciò, come conseguenza, non è opportuno prendere in considerazione la spiegazione data, visto che per Euclide 1 non era un numero, figuriamoci se poteva considerarlo numero primo!
Sul punto 5, nessuno scandalo se in Algebra si tratta a parte 1, come unico elemento invertibile degli anelli.
Infine, sulla conclusione riassuntiva dell’argomentazione di Languasco-Zaccagnini, ben venga il “principio generale della Matematica: l’utilità e la versatilità delle definizioni sono decidibili solo < a posteriori>, cioè solo dopo averle viste all’opera e confrontate con possibili definizioni alternative”.

Conclusioni sui numeri primi e fattorizzazione

Concludiamo con alcune elementari puntualizzazioni e con una proposta sul perché 1 possa essere considerato un numero primo.

Nella teoria dei numeri, i fattori primi di un intero positivo sono i numeri primi che lo dividono esattamente, senza resto.

Premettiamo che la fattorizzazione prima di un intero positivo è l’elenco dei suoi fattori primi, con la massima potenza di ogni primo che divide esattamente l'intero e che il teorema fondamentale dell'aritmetica dice che ogni intero positivo ha una fattorizzazione prima unica.

Tenuto presente che un qualunque numero naturale ha infinite fattorizzazioni, lo si può infatti moltiplicare quante volte si vuole per 1. In pratica, però, non si considerano i fattori 1 nella fattorizzazione: è questa tra l'altro la ragione per cui si preferisce affermare che 1 non è un numero primo, anche se soddisferebbe la definizione "*è divisibile solamente per sé stesso e per 1*".

Di fatto però, siccome 1 è innegabilmente un numero, anche per esso, non solo per tutti gli altri numeri, non si dovrebbe considerare le sue infinite fattorizzazioni. Da qui il passo è breve, perché a nostro avviso si evinca che 1 sia un numero primo, in sintonia con chi condivide un'evoluzione sempre più auspicabile della Matematica.

Inoltre rifacendoci alla prima parte dell'articolo di cui al [2], nella figura 1, che rappresenta l'ordinamento lineare o totale dei numeri naturali positivi indotto dalla funzione successore, il numero 1 è tale e "non un numero" o un "non classificato".
Poi, la figura 2 possiamo anche interpretarla classificando i numeri in primi, tutti quelli 1, 2, 3, 5, 7, …al di sopra dei numeri composti che sono posti sotto in illimitate righe 4, 6, 10, 9, 14, …, 8, 12, 20, 30, 28, …, ecc.

Infine per rimanere in tema di grafici richiamiamo l'articolo di cui al [14] sui numeri primi rappresentati graficamente. Essi si possono, infatti, dividere in due grandi famiglie:
a) catene (molto simili alle catene lineari di molecole), espresse dalla formula $3n+1$, diciamo per n numero naturale e con eccezione del primo 3;
b) biforcuti (con coda doppia), espressi da $3n+2$.
In detti grafici il numero primo è rappresentato dal numero[2] di segmenti che compone la catena ed in particolare 1 è rappresentato da un solo segmento.

Lecce novembre 2009

Bibliografia

[1] web Bo Gianfranco. "Due o tre curiosità sui numeri primi" pubblicato sul sito http://utenti.quipo.it/base5/numeri/curiosprimi.htm .Aggiornato a luglio 2005.

[2] Languasco A.-Zaccagnini A. "2. Cosa sono i numeri primi", pubblicato sul sito http://matematica.uni-bocconi.it/LangZac/primi.htm

[3] Carolla G.- "Un tema che fa discutere: la primalità del numero 1", pubblicato sui siti www.gruppoeratostene.com , www.matematicamente.it sezione "Approfondimenti" e www.maecla.it , sezione "Problemi, curiosità, …". 2009.

[4] Carolla G.- "Dedicato a Goldbach", pubblicato sul sito www.gruppoeratostene.com . 2009

[5] Marcello Gigante, *La bibliothèque de Philodème et l'épicurisme Romain*. Paris, 1987

[6] Marcello Gigante, *Kepos e Peripatos*. Contributo alla storia dell'aristotelismo antico, Bibliopolis, 1999

[7] F.Cioffi, *I filosofi e le idee*, Vol.I, B.Mondadori editore

[8] Aristotele, *Metafisica*, libri VII, XII e XIV.

[9] Diogene Laerzio, *Vite e dottrine dei filosofi illustri*

[10] L. Taran, *Speusippus of Athens*, Leyde, 1981.

---

[2] Sottraendo 1 o 2 ad un qualsiasi numero primo ed applicando il criterio di divisibilità per 3, si può verificare il pregio di 3n+1 e 3n+2.

[11] Speusippo, *Frammenti*, a cura di Margherita Isnardi Parente, Napoli: Bibliopolis, 1980, ISBN 88-7088-011-7

[12] Federigo Enriques, Giorgio de Santillana, *Compendio di storia del pensiero scientifico : dall'antichità fino ai tempi moderni*. Bologna : Nicola Zanichelli editore, 1973 (ristampa anastatica dell'edizione 1936), p. 31

[13] A. Reghini - *I Numeri Sacri nella tradizione pitagorica massonica* - Cap. III - La terna dei numeri primi dispari.

[14] Stefano Maruelli "Le forme dei numeri primi" in corso di pubblicazione.