

Appunti sulla congettura di Artin

Gruppo Eratostene

Una breve definizione della congettura di Artin, dalla relativa voce di Wikipedia, prima di esaminare la distribuzione dei numeri più piccoli legati a tale congettura, e trarne qualche semplice regola per la loro stima empirica, ed eventuali osservazioni generali:

“Congettura di Artin

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In [matematica](#), la **congettura di Artin** è una [congettura](#) sull'insieme dei [numeri primi](#) p per cui un dato intero $a > 1$ è una [radice primitiva modulo](#) p . La congettura porta il nome di [Emil Artin](#), che la formulò ad [Helmut Hasse](#) il 27 settembre 1927, in accordo con il diario di quest'ultimo.

Precisamente, la congettura afferma che, dato un intero a non [quadrato](#), diverso da 1 e -1, se $S(a)$ è l'insieme dei primi p tali che a è una radice primitiva modulo p , allora

1. $S(a)$ possiede una [densità di Schnirelmann](#) positiva nell'insieme dei primi. In particolare, $S(a)$ è infinito.
2. Se a è [privo di quadrati](#), allora la densità è indipendente da a e uguale alla **costante di Artin**

$$C_{Artin} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) \approx 0.3739558136\dots$$

dove il prodotto è preso tra tutti i numeri primi.

Formule simili esistono quando a contiene quadrati.

Per esempio, se $a=2$, allora la congettura afferma che l'insieme dei primi p per cui 2 è una radice primitiva ha densità C . I primi più piccoli per cui accade questo sono

3, 5, 11, 13, 19, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 83, 101, 107,
131, 139, 149, 163, 173, 179, 181, 197, 211, 227, 269,
293, 317, 347, 349, 373, 379, 389, 419, 421, 443, 461,
467, 491, ...(Sequenza [A001122](#) dell'[OEIS](#))

che contiene 38 dei 95 primi più piccoli di 500. Il rapporto (che dovrebbe tendere a C è $38/95=0.41051\dots$

Nel 1967 [Hooley](#) pubblicò una dimostrazione della congettura, condizionata però ad una [generalizzazione dell'ipotesi di Riemann](#).^[1]

Nel 1984 [R. Gupta](#) e [R. Ram Murty](#) mostrarono, attraverso [metodi di crivello](#) che la congettura è vera per infiniti valori di a .^[2] Il loro risultato fu migliorato da [Roger Heath-Brown](#), che dimostrò che la congettura è vera per tutti i numeri primi eccetto al più due di essi.^[3] La sua dimostrazione non è costruttiva; di conseguenza non è noto nessun valore specifico di a per cui la congettura di Artin è vera”

Nostre osservazioni:

a) distribuzione dei suddetti numeri più piccoli, che chiameremo

$$a(N) = a(10^n), \text{ fino a } N = 10^n$$

TABELLA 1

(Con rapporto empirico medio $(c)/(d) = 2$)

n	10^n	$\pi(10^n)$; a(10^n);	r = (c)/(d); stima empirica			
<u>(a)</u>	<u>(b)</u>	<u>(c)</u>	<u>(d)</u>	<u>(e)</u>	<u>$\sim \pi(10^n)/2$</u>	
1	10^1	4	2	2	2	
2	10^2	25	12	2,08	12,5	
2,5 (500)	$\frac{10^3}{2}$	95	38	2,5	47,5	
...	
...	2,674112726 ...		

con **2,674112276** rapporto medio per valori di n ancora più alti?

Come si nota facilmente, infatti, il rapporto $r = (c)/(d)$ cresce lentamente al crescere di n e quindi di 10^n , e quindi il risultato è sempre minore della stima empirica:

$$a(10^n) \sim \pi(10^n)/2 \sim [10^n / \ln(10^n)]/2 \quad (1)$$

quindi in generale il numero di a(N) è connesso a $\pi(N)$ dalla (1)

Qui abbiamo usato il rapporto inverso, per esempio $95/38 = 2,5$

anziché $38/95 = 0,41051\dots$, tendente a $C = 0,3739558136$ come invece si è fatto nella suddetta voce di Wikipedia per definire la costante di Artin. Invertendola, come $1/C$, abbiamo ottenuto $2,674112726$, il rapporto medio tra $\pi(N)$ e $a(N)$, e quindi una nuova costante, che calcoli futuri su una serie più lunga di numeri $a(N)$ potrebbe confermare oppure no.

Invertendo a sua volta $2,674112726$ abbiamo $1 / 2,674112726 = 0,373955876$ molto vicino al valore sopra accennato della costante di Artin $C = 0,3739558136$.

b) TABELLA 2

(ora con rapporto medio 2,67)

n	10^n	$\pi(10^n)$; a(10^n);	r = (c)/(d); stima empirica		
<u>(a)</u>	<u>(b)</u>	<u>(c)</u>	<u>(d)</u>	<u>(e)</u>	<u>$\sim \pi(10^n)/2,67$</u>
1	10^1	4	2	2,67	1,49 ~ 2
2	10^2	25	12	2,67	9,36 ~ 12
2,5 (500)	$\frac{10^3}{2}$	95	38	2,67	35,58 ~ 38
...
...	2,674112726	... ~ (d)

La parola ora ad altri matematici che, calcolando una serie più lunga dei numeri $a(N)$, potranno confermare quanto sopra, tenendo conto che 2,674112726 è molto vicino al valore noto di :

$$2,618030789 = 1,618033^2, \text{ e quindi con possibile}$$

coinvolgimento del numero aureo $1,618033\dots$, e che:

$$0,618033/2 = 0,3090165 \sim C = 0,3739558136, \text{ con rapporto}$$

$$0,3739558136/0,3090165 = \mathbf{1,210148369} \sim 1,2002269157, \text{ circa}$$

la media aritmetica tra:

$$\sqrt{1,618033} = 1,272019261 \text{ e } \sqrt[4]{1,618033} = 1,127838313,$$

$$\text{infatti } (1,272019261 + 1,127838313)/2 = \mathbf{1,199928787} \sim \mathbf{1,2101}\dots$$

con differenza di $0,0102\dots$, circa un centesimo. Qui sembra

esserci una relazione con la sezione aurea $0,618033$, circa una

volta e mezza doppio della costante di Artin:

$$0,618033/0,3739558136 = 1,6526, \text{ a sua volta numero molto vicino}$$

a $1,618033$, con differenza di soli circa tre centesimi:

$$1,6526 - 1,618033 = 0,034567$$

Abbiamo anche $1,6526...^2 = 2,7310... \sim 2,6741...$, con una differenza $0,056 =$ circa 4 centesimi.

Anche queste nostre osservazioni sul numero aureo ecc. potrebbero avere la loro importanza, anche se non sappiamo ancora se sono una novità o sono già state fatte da altri.

c) **TABELLA 3**

(Relazione dei numeri “a” con forme $6k \pm 1$, tranne il 3 iniziale)

(in rosso i numeri primi gemelli)

<u>a = 6k - 1</u>	<u>a = 6k + 1</u>	<u>k</u>
5		<i>1</i>
11		2
	13	2
	19	3
29		5
	37	6
53		9 ~ 8
59		10
	61	10
	67	11
83		14 ~ <i>13</i>
101		17
107		18
131		22 ~ <i>21</i>

	139	23
149		25
	163	27
173		29
179		30
	181	30
197		33 ~ 34
	211	35
227		38
269		45
293		49
317		53 ~ 55
347		58
	349	
	373	
	379	
389		
419		70
	421	70
443		74
461		77
467		78
491		82

Totali: 24 numeri di forma $6k - 1$ 13 numeri di forma $6k + 1$

Evidente **preferenza**, quindi dei numeri $a(N)$ per la forma $6k-1$, poiché fino ad un dato N i numeri delle due forme si equivalgono (per esempio nei 23 numeri primi fino a 100 (tranne quindi il 2 e il 3 iniziali) ci sono 12 numeri primi di forma $6k-1$ e 11 di forma

$6k+1$, con sostanziale parità, verificabile per qualsiasi N .

Qui invece i primi sono circa il doppio dei secondi, quindi si esclude del tutto la casualità, e ci dovrà essere pure un motivo per questa “preferenza”. I numeri $a(N)$ di forma $6k-1$ formano piccoli gruppi consecutivi della stessa forma $6k-1$ più numerosi dei gruppi di quelli di forma $6k+1$; mentre le coppie di gemelli sono solo tre, mentre statisticamente dovrebbero essere circa la metà di quelle presenti fino a $N = 500$, e cioè $21/2,67 = 7,8$, in realtà ce ne sono solo **3** (quelle segnate in rosso). Tale valore potrebbe essere dato anche da $g(500) = 21$, diviso il quadrato della costante inversa di Artin, $21/2,67^2 = 21/7,1289 = 2,94 \sim$ **3 coppie di gemelli tra i numeri a(500)**, essendo presente il quadrato del logaritmo di N nella formula per il calcolo delle coppie di gemelli $g(N) \sim [N/(\ln N)] * 1,32033\dots$, infatti :

$$g(500) = (500/38,62) * 1,32033 = 17,09 \sim \mathbf{21}$$
 valore reale di $g(500)$

Quindi, i numeri $a(N)$ preferiscono la forma $6k-1$ ma non preferiscono molto le coppie di numeri gemelli, e nemmeno i

valori di k numeri di Fibonacci, (vedi successivo punto d) tranne che per i primi quattro numeri iniziali di k : 1, 2, 3, e 5, almeno fino ad $N = 500$, per i quali abbiamo la serie disponibile di numeri $a(500)$ sui quali poter fare le suddette osservazioni;

d) inoltre, tra i numeri k ci sono solo i numeri di Fibonacci 1, 2, 3 e 5, mentre i successivi: 8, 13, 21, 34, 55 vengono “saltati” : un'altra osservazione da controllare nelle serie più lunghe di numeri $a(N)$.

Queste quattro osservazioni potrebbero bastare per poter studiare meglio in seguito la congettura di Artin (molto difficile da dimostrare...) , sapendo ora che dato N , i numeri $a(N)$ connessi alla congettura sono circa $\pi(N) / 2,67\dots$ con $2,67\dots$ nuova costante, che chiameremo costante inversa di Artin, poiché $2,6741\dots = 1/C = 1/ 0,3739\dots$

In seguito, disponendo eventualmente di nuovi dati e di una serie più lunga di numeri $a(N)$, potremmo tornare ad occuparci della congettura di Artin, per verificare meglio le quattro

osservazioni esposte in questo lavoro preliminare.

Caltanissetta 1.6.2010