

Block Notes Matematico

Integrazione di Stieltjes, Identità di Abel, Formula della somma di Eulero, integrazione asintotica ed esempi d'uso

ing. Rosario Turco

Abstract

In questo articolo l'autore si sofferma su alcuni argomenti di Teoria dei numeri, mostrando come delle sommatorie possono essere stimate con degli integrali e attraverso Lemmi e Teoremi si arriva fino a degli esempi pratici tipici della teoria dei numeri.

Identità di Abel

L'identità di Abel è un ottimo tool per poter stimare delle somme attraverso degli integrali.

Lemma A

Definiamo $A(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} a(k)$ dove $A(x)=0$ se $x < 1$. Se f è una funzione continua e derivabile nell'intervallo

$$[1, x] \text{ allora è: } \sum_{1 \leq k \leq x} a(k)f(k) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt$$

Dimostrazione

Sia $0 < y < 1$ e usiamo l'integrazione di Stieltjes:

$$\sum_{y < k \leq x} a(k)f(k) = \int_y^x f(t)dA(t)$$

Ricordando la "regola di integrazione per parti", che possiamo ricavarci da:

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ e passando a integrare: } fg - \int f'g = \int fg'$$

Per cui è:

$$= [f(t)A(t)]_y^x - \int_y^x A(t)f'(t) = f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)f'(t)$$

Se poniamo $y \rightarrow 1^-$ allora $A(y)=0$, per cui è vero il Lemma A.

La formula della somma di Eulero è in realtà un corollario dell'identità di Abel.

Corollario della Formula della somma di Eulero

Sia f una funzione continua e differenziabile in $[1, x]$. Allora è:

$$\sum_{1 \leq k \leq x} f(k) = f(1) + (x - \lfloor x \rfloor) f(x) + \int_1^x f(t) dt + \int_1^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t) dt$$

nota: col simbolo $\lfloor x \rfloor$ si intende il più grande intero minore o uguale di x .

Dimostrazione

Nella Lemma A poniamo $a(k)=1$; per cui per la definizione di $A(x)=\lfloor x \rfloor$ e dall'identità di Abel otteniamo che:

$$\sum_{1 \leq k \leq x} f(k) = \lfloor x \rfloor f(x) - \int_1^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor f'(t) dt$$

L'integrale però, sfruttando l'integrazione per parti, diventa:

$$\int_1^{\lfloor x \rfloor} t f'(t) dt = \lfloor x \rfloor f(\lfloor x \rfloor) - f(1) - \int_1^{\lfloor x \rfloor} f(t) dt$$

Da cui combinando le formule si dimostra il Corollario.

Esempio sul Numero armonico H_n

Si definisce n-esimo numero armonico la quantità $H_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}$.

Teorema

$$H_n = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Dove $\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \frac{(t - \lfloor t \rfloor)}{t^2} dt$ è la costante di Eulero.

Dimostrazione

Dal Corollario della formula della somma di Eulero poniamo $f(x)=1/x$; quindi otteniamo che:

$$H_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} = 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt - \int_1^n \frac{(t - \lfloor t \rfloor)}{t^2} dt = 1 - [\log t]_1^n - \int_1^n \frac{(t - \lfloor t \rfloor)}{t^2} dt = \log n + \left(1 - \int_1^\infty \frac{(t - \lfloor t \rfloor)}{t^2} dt \right) + \int_n^\infty \frac{(t - \lfloor t \rfloor)}{t^2} dt$$

$$H_n = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Integrazione asintotica

Il metodo precedente permette di approssimare le somme con degli integrali. Tuttavia ci sono casi in cui anche l'integrale non conduce ad una forma chiusa semplice. Se siamo però interessati all'andamento asintotico allora si può ottenere una buona approssimazione.

L'idea centrale dell'approssimazione è la seguente: se $f(t) = s(t)t^\mu$ e stiamo valutando l'integrale $\int_a^x f(t) dt$, se $s(t)$ varia lentamente rispetto alla potenza di t , allora si può considerare $s(t)$ come se fosse una costante e dire che l'integrale vale $s(x) \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$. E' questo a cui mira il Teorema successivo.

Teorema

Sia f una funzione reale positiva, definita in $[a, \infty)$, continua e differenziabile e tale che $f'(x)/f(x) \sim \mu/x$ per qualche numero reale $\mu > -1$. Allora se $\mu \neq 0$ è:

$$\int_a^x f(t) dt \sim \frac{xf(x)}{\mu+1}$$

Se $f'(x)/f(x) = o(1/x)$ allora è: $\int_a^x f(t) dt \sim xf(x)$

Dimostrazione

Partiamo da: $f'(x)/f(x) \sim \mu/x$.

Integrando è: $\log f(x) \sim \mu \log x$ per cui $f(x) \sim e^{\mu \log x} = x^{\mu+o(1)}$.

Quindi è: $\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x t^\mu dt$ e poiché $df(t) = \mu t^{\mu-1}$ allora $t/\mu \cdot \mu t^{\mu-1} = t^\mu$ per cui è:

$$\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x t^\mu dt = \int_a^x \frac{t}{\mu} df(t) \quad (1)$$

Se integriamo per parti la (1) otteniamo che:

$$\int_a^x \frac{t}{\mu} df(t) = \left[\frac{t}{\mu} f(t) \right]_a^x - \frac{1}{\mu} \int_a^x f(t) dt = \frac{x}{\mu} f(x) - \frac{a}{\mu} f(a) - \frac{1}{\mu} \int_a^x f(t) dt$$

Per cui essendo:

$$\int_a^x f(t) dt \sim \frac{x}{\mu} f(x) - O(1) - \frac{1}{\mu} \int_a^x f(t) dt$$

Allora è:

$$\int_a^x f(t) dt \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \sim \frac{x}{\mu} f(x)$$

Da cui è vera la prima parte del Teorema. La seconda parte segue una analoga dimostrazione.

Esempio del Logaritmo integrale

Il logaritmo integrale è $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ non ha una espressione in forma chiusa. Se nel teorema precedente

poniamo $f(x)=1/\log x$ da cui $f'/f = -1/(x \log x)$ e otteniamo rapidamente che:

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$$

Si può usare una analoga tecnica anche per l'errore che si commette; difatti:

$$\varepsilon(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} - \frac{x}{\log x}$$

Ora poiché

$$\varepsilon'(x) = \frac{1}{(\log x)^2}$$

allora

$$\varepsilon(x) = \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} + O(1)$$

e se si riapplica il Teorema precedente allora è:

$$\varepsilon(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$