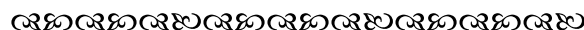


Block Notes Matematico

L'analisi non standard

ing. Rosario Turco



Spesso i passaggi sono coerenti con la teoria analitica, ma due formule portano a risultati diversi. Perché? Spesso sono errori di applicazione concettuale; in altri casi si tratta di strumenti matematici da affinare ulteriormente.

Un esempio viene dalla matematica del '700: l'analisi infinitesimale, ad esempio, può portare a delle contraddizioni, (vedi critiche di *Berkeley*) dovute al concetto di infinitesimo introdotto da *Newton* e *Leibnitz*.

Difatti oggi si parla di “*Analisi non standard*”, introdotta da *Robinson* nel 1966 (vedi il suo libro *Non standard Analysis (1966)*) e che mira a riscrivere alcune delle pagine più belle della Matematica come il metodo della derivata, inventato dai *due grandi giganti*, ma con strumenti e visibilità risalenti all'epoca tra il '600 e il '700 (quando non tutto sui numeri reali era stato scritto e dimostrato).

Oggi una branca interessante è la *SIA - Smooth Infinitesimal Analysis*. *Robinson* nei suoi studi di logica scoprì che tutti gli insiemi numerici potevano essere estesi con numeri "non standard" che ne ereditavano le proprietà; per l'insieme dei numeri reali, questo altro non erano che gli infinitesimi di *Leibniz*.

Questo è anche una delle cose che sottintendeva *Godel*: spesso mancano gli strumenti e vanno cercati altri o non sono precisi gli strumenti attuali e vanno estesi. In altri termini alcuni degli strumenti disponibili sono ancora poco adatti a risolvere certi problemi; ad esempio i *problemi del Millennio* come il problema del “gap di massa” o di *Yang e Mills* o i problemi della Fisica vedi la teoria di *Bukhard Heim*, dove si sente la necessità di una “matematica mesonica” in un realtà multi-dimensionale.

In matematica dal concetto di infinitesimo sono, poi, nati i limiti, le derivate, intese come limiti di rapporti incrementali, e gli integrali (come somme infinite); su cui infine si sono definite le regole di derivazione, integrazione etc.

Per i “*due giganti*” gli infinitesimi sono numeri minori in valore assoluto di qualsiasi numero reale, ma comunque diversi da zero; cioè sono un nuovo tipo di numeri, per i quali *Leibniz* supponeva continuassero a valere tutte le ordinarie regole dell'Algebra.

In realtà un infinitesimo non è un intero, ma un numero razionale o irrazionale.

Lo stesso computer, per chi ha pratica di programmazione, ha difficoltà (non si può!) a confrontare un numero di tal genere con lo 0, ma lo si deve confrontare almeno con 0.0!

Lo stesso infinito attualmente non è considerato un valore (è un *NaN* = Not a Number), ma un concetto e analogamente si deve dire per l'infinitesimo!

Spesso ciò porta a delle contraddizioni, specie quando si opera con i limiti. La contraddizione concettuale, sempre presente, è che un infinitesimo dx si intende in partenza diverso da zero, ma poi lo si approssima a zero e lo si elimina nei calcoli!

Banalmente basta osservare come Newton e Leibnitz intendessero la derivata o il rapporto tra l'infinitesimo dy e l'infinitesimo dx ; in simboli:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

Un semplice esempio può ora chiarire la natura delle critiche del Berkeley; si consideri la funzione $y = x^2$. Applicando la definizione si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} = \frac{2xdx + dx^2}{dx}$$

dividendo ora il numeratore per dx si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

Ma dx è infinitesimo e quindi trascurabile rispetto al numero reale $2x$, dunque la derivata vale:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Attenzione! C'è stata una *disinvolta eliminazione* dell'infinitesimo dx . E' qui che si concentrarono, infatti, le critiche del Berkeley: quando si divide per dx si presuppone che dx sia diverso da zero, ma quando si elimina il dx si presuppone che sia uguale a zero; gli infinitesimi sono, dunque, **entità concettuali contraddittorie**, conclude il Berkeley, che le definisce ironicamente *ghosts of departed quantities* (*fantasmi di entità defunte*).

Inoltre, in matematica, esiste una proprietà detta "*proprietà di Archimede*" che deve valere per ogni numero reale. Questa proprietà dice che per ogni numero reale a , deve esistere un numero naturale n tale che a sia maggiore del reciproco di n :

$$\frac{1}{n} < a$$

con a numero reale e n numero naturale.

Questa proprietà non può valere per gli infinitesimi che Leibniz aveva definito, ovvero come i più piccoli numeri immaginabili e, quindi, non potevano esistere numeri reali minori.

Robinson introdusse gli infinitesimi come numeri dx tali che, per ogni n naturale > 0 è:

$$0 < dx < \frac{1}{n}$$

La somma di un numero reale x e di un numero infinitesimo dx è allora detta *numero iperreale* $x + dx$.

Definisce la nuova funzione $st(_)$ *parte standard* che, assegnato un numero iperreale, restituisce la sua parte reale; per esempio:

$$st(2 + 3dx) = 2$$

A questo punto la nuova definizione di derivata è semplicemente:

$$f'(x) = st\left(\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}\right)$$

Nell'esempio della funzione $y = x^2$ l'eliminazione finale dell'infinitesimo dx è ora pienamente giustificata.

$$\frac{dy}{dx} = st(2x + dx) = 2x$$

Per Robinson quindi gli infinitesimi sono “definitivamente” diversi da zero e la loro eliminazione è giustificata dall'uso della funzione $st(_)$.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.