Andamento Ciclico del
Numero di fattori di un numero N

F. Di Noto - Gruppo Eratostene

Introduzione

Nell'articolo si parlerà delle forme 6k, 6k+1,ecc. e della funzione bigomega(x). Si faranno considerazioni sulla sua fattorizzazione in m fattori primi, con x = N , e con m valore della funzione bigomega(x). Circa il numero m dei fattori di un numero N, si rimanda a quanto detto in "Fattorizzazione dei Repunit" e alla funzione bigomega(x) accennata dall'Ing. Turco nel Block Matematico "Sulle spalle dei giganti".

Fattorizzazione con la bigomega

Nel seguito colleghiamo la funzione bigomega(x) con le onnipresenti forme 6k, 6k$\pm$1, 6k$\pm$2,6k$\pm$3 (forme che coprono tutti i numeri N), in modo simile alla congettura di Goldbach per i numeri pari, e quindi solo 6k e 6k$\pm$2.

Infatti, cosi come la funzione G(N) di Goldbach dà valori più alti per N pari di forma 6k rispetto a N pari vicini ma di forma 6k $\pm$2, anche la suddetta funzione bigomega(x) dà valori più alti per x = N di forma 6k, poiché tale forma contiene i fattori 2 e 3, essendo N multiplo di 6; mentre per le altre forme di numeri, escludono il fattore 2 ([1]), il fattore 3([2]).

[1] le forme 6k+3
2 le forme 6k+2

Ed entrambi i fattori 2 e 3, le forme $6k\pm1$ le uniche che comprendono i numeri primi, i semiprimi e le potenze di primi, hanno meno fattori delle altre forme: per cui la funzione bigomega(x) fornisce bassi valori, sempre 2 per i numeri primi, cioè i fattori banali 1 ed N, per queste forme, valori leggermente superiori per le forme $6k \pm2$ ([3]), leggermente superiori per le forme 6 ± 3 ([4]), e valori più alti per le forme 6k, che comprende i fattori 2 e 3 ed i loro numerosissimi multipli, molti dei quali divisori di 36; per esempio 36 = 2 x 2 x 3 x 3, con divisori 3, 4, 6, fino a $\sqrt{36}= 6$ e 9, 12, 18 da $\sqrt{36} =6$ a 36.

Facendo una tabella in sei colonne dei valori di bigomega(x), ci si rende conto benissimo di tale andamento. come per le tabelle della funzione $\sigma(N)$ per esempio, o per la funzione G(N).

L'esempio riportato per N = 90 = 6 x15, e bigomega(90) = m = 4 poiché 90 = 2 x 3 x 3 x 5 = 2 x 3^2 x 5 = 4 = m fattori, mentre il numero precedente 90 -1 è primo e il valore di bigomega(89) è 0, si considerano solo i fattori propri; mentre per 90+1 = 91 = 7 x 13 il valore di bigomega(91) = 2; in definitiva, il valore di bigomega(x) non è mai superiore al valore di bigomega del multiplo di 6 più vicino; per esempio 85, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 94 e 95 non possono avere un valore di bigomega maggiore di quello relativo a 84, 90 e 96, multipli di 6 più vicini ad essi.

---

3 vi manca il fattore 3
[4] vi manca il fattore 2

Ma ora colleghiamo tutto ciò alla congettura di Goldbach estesa a m fattori. Prendiamo sempre N = 90 come esempio; la somma dei suoi fattori è 2 + 3 + 3 + 5 = 13, con media 13/4 = 3,25, superiore alla media di 3 + 3 + 3 + 3 = 3 x 4 = 12, e 12/4 = 3, della quarta potenza precedente, 81 = 3^4, così come per Goldbach forte, la semisomma di (p + q)/2 la *media aritmetica* è sempre superiore a n = N ^ (1/2), e così pure la somma (p + q) > n, infatti 13, 25 è superiore alla somma 12 relativa a 81.

E così come per i prodotti di Goldbach p x q il fattore minore è sempre minore di p^(1/2) x q (media geometrica), anche per 90 il fattore minore è minore della quarta radice di 90 =3,08…, infatti il fattore 2 (e anche il 3 è minore di 3,08…, e basta cercarlo fino a questo valore; trovatolo, rimane il numero 90/2 = 45, prodotto degli altri tre fattori; ma ora il fattore minore è minore della radice cubica di 45, e cioè 45^0,33… = 3,51; e infatti il più piccolo dei tre fattori rimasti, 3, è minore di 3,51; rimane ora 45/3 = 15, e siamo alla nota fattorizzazione di numeri N con due soli fattori primi, con il più piccolo (ancora 3, minore di √15 = 3,87), e quindi 15/3 = 5, l'ultimo fattore rimasto.

Esempio di algoritmo di fattorizzazione

Facciamo un esempio:

N = 18 445 (= 5 x 7 x 17 x 31, i fattori che dobbiamo trovare)

Bigomega(N) = m = 4.
18 445^(1/m) = 11,65

Il numero n ^ m < N = 18445 è n=11; difatti 11^4=14641
Media aritmetica 18445/m > 14641^(1/m)

Per cui il più piccolo fattore di N deve essere minore della media geometrica 11,65, infatti fino a 11 troviamo i fattori 5 e 7, con prodotto 5 x 7 = 35 = k: con N /k = 527 abbiamo il prodotto dei due fattori più grandi, infatti 527 = 17 x 31ottenuti con la fattorizzazione di N prodotto di due numeri primi (semiprimi); la procedura di considerare solo il fattore 5, poi N /5 = 3689 sarebbe stata più lunga, invece con i due fattori più piccoli ed entrambi minori di 11,65 si risparmia tempo.

Il tutto, ovviamente, è estensibile a qualsiasi numero di fattori dia la funzione bigomega, con m>0 qualsiasi: ovvio che più grande è il valore di bigomega, più piccola è la radice, in questo caso il fattore più piccolo p sarà minore di N ^ (1/m), e una volta trovato, da solo o con qualche altro, come nell'esempio precedente per N = 18445, si procede con il nuovo numero N' = N/k, fino a trovare tutti gli altri fattori successivi più grandi.

Tutto ciò è possibile trovando m con la funzione bigomega, in caso contrario si procede con la fattorizzazione classica per tentativi (ma le due procedure tendono a coincidere); oppure sfruttando la congettura di Goldbach estesa a m primi, tentando con i numeri pari maggiori della m° radice di N, ma forse si ricade nella medesima difficoltà di due soli primi (provare con tutti i numeri pari da 2n a N -3, che sono tanti).

Comunque, ora le idee sono un po' più chiare, e forse in qualche modo utilmente sfruttabili per fattorizzare N con m primi, con m valore della funzione bigomega(N), e strettamente dipendente dalla forma aritmetica di N, come prima detto; e il cui grafico rispecchia fedelmente quello della funzione σ(n) (vedi Tavola dei divisori) che però si può calcolare solo *conoscendo prima* tutti i divisori di N, non essendoci ancora una formula diretta tra N e σ(N) senza passare dalla difficoltosa fattorizzazione di N.

Sappiamo solo che per i fattoriali (forma 6n) e quindi abbondanti e superabbondanti, il rapporto σ(N) / N è più alto che per le altre forme, e cresce lentamente al crescere dei fattori di n!, ma anche per i primoriali, prodotti dei soli numeri primi successivi, per i prodotti successivi dei numeri della serie di Fibonacci, e dei numeri di partizioni, con multipli vari di 6 in tutti e tre i casi a partire da N = 6.